

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224577

UNIVERSAL
LIBRARY

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم ثالث متوی

تصنیف

ای۔ ڈبلیو۔ ہالسن۔ ایس سی ڈی ایل۔ ایل۔ ڈی این۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن پرنٹنگ ٹالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکاری

۱۳۵۵ھ م ۱۳۳۵ھ ق ۱۹۲۶ء

طبع جامعہ عثمانیہ سرکاری

۹۶

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

(۱۰)

صفحہ	مضمون	دفعات
۱	تہبید -	۱
۲	کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین -	۲ تا ۳
۴	زاویوں کی عددی پیمائش -	۴
۵	زاویوں کی دائری پیمائش -	۵ تا ۱۰
۹	دائری قوس کا طول -	۱۱
۱۲	دائرہ کے قطاع کا رقبہ -	۱۲
۱۵	پہلے باب پر مثالیں -	

دوسرا باب

صفحہ

دفعات

مضمون

خطوں کی پیمائش - ظل

۱۸

۱۳ تا ۱۶ - خطوں کی پیمائش -

۲۰

۱۷ - ظل -

تیسرا باب

دائرہ تفاعل

۲۲

۱۸ تا ۲۱ - دائرہ تفاعلوں کی تعریفات -

۲۷

۲۲ تا ۲۴ - دائرہ تفاعلوں کے درمیان رشتے -

۳۰

۲۵ - دائرہ تفاعلوں کی قیمتوں کے حدود -

۳۰

۲۶ تا ۲۹ - دائرہ تفاعلوں کے خواص -

۳۵

۳۰ - دائرہ تفاعلوں کی دوریت -

۳۶

۳۱ - دائرہ تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں -

۳۹

۳۲ - دائرہ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر -

۴۱

۳۳ - وہ زاویے جنکا دائرہ تفاعل وہی ہے -

۴۲

۳۴ - بعض زاویوں کے دائرہ تفاعلوں کا تعین -

۴۶

۳۵ تا ۳۸ - متغلوب دائرہ تفاعل -

۴۹

تیسرے باب پر مثالیں

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائرہ تفاعل

۳۹ تا ۴۲ - جیب اور جیب التمام کے لیے جمع اور تفریق کے ضابطے - ۵۳

صفحہ	مضمون	دفعات
۲۵ تا ۴۴	دوجیوب یا دوجیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لیے ضابطے -	
۶۰	۶۰ -	
۶۶	۶۶ - حماس اور حماس التمام کے لیے جمع اور تفریق کے ضابطے -	
۶۷	۶۷ - مختلف ضوابط -	
۷۰	۷۰ - تین زاویوں کے لیے جمع کے ضابطے -	
۷۱	۷۱ - زاویوں کی کسی تعداد کے لیے جمع کے ضابطے -	
۵۰	۵۰ - جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا -	
۷۱	۷۱ - ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لیے ضوابط -	
۷۲	۷۲ - جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لیے ضعیفی زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں چلے -	
۸۲	۸۲ - متقابل تفاعلوں کے درمیان رشتے -	
۸۳	۸۳ - ضابطوں کے ہندسی ثبوت -	
۸۷	۸۷ - چوتھے باب پر مثالیں -	

پانچواں باب

تحت ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعل

۹۶	۹۶ - ضوابط -	۵۵ تا ۶۳
۱۰۷	۱۰۷ - دئے ہوئے زاوئے کے ایک مثلث کے دائری تفاعل -	
۱۱۱	۱۱۱ - بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعین -	۶۴ تا ۶۷
۱۱۶	۱۱۶ - پانچویں باب پر مثالیں -	

صفحہ	مضمون	دفعات
۲۳۷	مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال -	۱۱۰ تا ۱۱۱
۲۴۲	متناسب اجزاء کا اصول -	۱۱۲ تا ۱۱۴
۲۴۹	لوگاریتمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو موزوں بنانا -	۱۱۵ تا ۱۱۷

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۲۵۳	مسائل -	۱۱۸ تا ۱۲۲
۲۶۰	مثلث کا رقبہ -	۱۲۵
۲۶۱	مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات -	۱۲۶
۲۶۴	کثیر الاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے -	۱۲۷ تا ۱۲۸
۲۶۵	کثیر الاضلاع کا رقبہ	۱۲۹
۲۶۷	دسویں باب پر مثالیں -	

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

۲۷۴	تہبہ -	۱۳۰
۲۷۴	قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۱ تا ۱۳۳
۲۷۸	غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۴ تا ۱۳۷

صفحہ	مضمون	دفعات
۲۸۹	کثیر الاضلاعوں کا حل۔	۱۲۴ تا ۱۲۱
۲۹۳	بلندیوں اور فاصلے۔	۱۲۹ تا ۱۲۵
۳۰۰	گیا رہویں باب پر مثالیں۔	

بارہواں باب

مثلثوں اور ذواربعتہ الاضلاعوں کے خواص

۳۱۳	مثبت۔	۱۵۰
۳۱۳	مثلث کا حاطط دائرہ	۱۵۱
۳۱۴	مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے۔	۱۵۲ تا ۱۵۱
۳۲۱	خطوط وسطی۔	۱۵۵
۳۲۳	زاویوں کے ناصف	۱۵۶
۳۲۴	مثلث پائین۔	۱۵۷
۳۲۶	خاص نقطوں کے درمیان فاصلے۔	۱۵۸
۳۳۰	مثلث کے رقبہ کے لیے جملے۔	۱۵۹
۳۳۱	مثلثوں کے خواص۔	۱۶۰ تا ۱۶۳
۳۳۴	ذواربعتہ الاضلاعوں کے خواص۔	۱۶۴ تا ۱۶۳
۳۴۲	منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص۔	۱۶۸
۳۴۳	مثالیں۔	۱۶۹
۳۵۰	بارہویں باب پر مثالیں	

تیرہواں باب

دفعات مضمون صفحہ

ملف اعداد

۳۷۰	۱۷۰ - تمہید -
۳۷۰	۱۷۱ تا ۱۷۴ - ملف اعداد کی ہندسی تعبیر -
۳۷۴	۱۷۵ تا ۱۷۷ - ملف عددوں کی جمع -
۳۷۷	۱۷۸ - ملف عددوں کی ضرب -
۳۷۹	۱۷۹ - ایک ملف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا -
۳۸۱	۱۸۰ تا ۱۸۵ - ملف عددوں کی قوتیں -
۳۸۸	۱۸۶ تا ۱۸۷ - ڈیمو انر کا مسئلہ -
۳۹۳	۱۸۸ - اجزائے ضربی -
۳۹۶	۱۸۹ - دائرہ کے خواص -
۳۹۸	۱۹۰ - مثالیں -
۴۰۰	تیرہویں باب پر مثالیں -

چودھواں باب

لامتناہی سلسلوں کا نظریہ

۴۰۷	۱۹۱ - تمہید -
۴۰۷	۱۹۲ تا ۱۹۶ - حقیقی سلسلوں کا استدقاق -
۴۱۷	۱۹۷ - ملف سلسلوں کا استدقاق -
۴۲۰	۱۹۸ - مسلسل تغاغل -
۴۲۱	۱۹۹ تا ۲۰۱ - یکساں استدقاق -
۴۲۸	۲۰۲ - سلسلہ ہندسیہ -

صفحہ	مضمون	دفعات
۴۳۰	صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے۔	۲۰۳ تا ۲۰۴
۴۴۲	دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق۔	۲۰۹
۴۴۴	دو ہرے سلسلوں کا استدقاق۔	۲۱۰
۴۴۹	مسئلہ شنائی۔	۲۱۱ تا ۲۱۲
۴۵۸	ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعل۔	۲۱۳ تا ۲۱۴
	کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں۔	۲۱۸ تا ۲۱۹
۴۶۹	جیبوں اور جیبوں التام کی قوتوں کو ضعیفی زاویوں کی جیبوں اور جیبوں التام میں بیان کرنا۔	۲۲۰ تا ۲۲۲
۴۷۲		

پندرہواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارتم

۴۷۹	قوت نمائی سلسلہ۔	۲۲۳ تا ۲۲۴
۴۸۶	دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ۔	۲۲۸
۴۸۷	دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں۔	۲۲۹ تا ۲۳۰ (۲)
۴۹۲	قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت۔	۲۳۱ تا ۲۳۲
۴۹۴	دائری تفاعلوں کی تخیلی تعریف۔	۲۳۳ تا ۲۳۴
۵۰۲	طبعی لوکارتم۔	۲۳۵ تا ۲۳۶
۵۰۴	عام قوت نما تفاعل۔	۲۳۶ تا ۲۳۷
۵۰۹	کسی اساس پر لوکارتم۔	۲۳۵
۵۱۰	عام ترین لوکارتم۔	۲۳۶ تا ۲۳۷
۵۱۳	لوکارتمی سلسلہ۔	۲۳۷ تا ۲۳۸

صفحہ	مضمون	دفعات
۵۱۹	گرگوری کا سلسلہ -	۲۵۱
۵۲۱	دائرہ کی تربیع -	۲۵۱ (د) تا ۲۵۱ (ج)
۵۳۰	دائرہ کی تقسیمی تربیع -	۲۵۲ تا ۲۵۲
۵۳۳	مشقی متماثلات -	۲۵۵
۵۳۵	سلسلوں کا جمع کرنا -	۲۵۴ تا ۲۵۶
۵۴۰	پندرہویں باب پر مثالیں -	

سولہواں باب

زائدی تفاعلات

۵۵۳	تمہید -	۲۵۸
۵۵۳	زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے -	۲۵۹
۵۵۵	جمع کے ضابطے -	۲۶۱ تا ۲۶۱
۵۵۶	ضعفوں یا تحت ضعفوں کے لیے ضابطے -	۲۶۲
۵۵۶	زائدی تفاعلوں کے لیے سلسلے -	۲۶۵ تا ۲۶۳
۵۵۸	زائدی تفاعلوں کی دوریت -	۲۶۶
۵۵۹	قائم الزاویہ قطع زائد کے قطع کا رقبہ -	۲۶۶ تا ۲۶۶
۵۶۶	ملف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کے لیے جملے -	۲۶۹
۵۶۷	ملف دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل -	۲۶۹ تا ۲۶۹
۵۷۱	مقلوب زائدی تفاعل -	۲۷۱ تا ۲۷۱
۵۷۳	کئی مساواتوں کا حل -	۲۷۷
۵۷۵	گڈرینی تفاعل کی جدول -	۲۷۸
۵۷۷	سولہویں باب پر مثالیں -	

صفحہ

مضمون

دفعات

سترہواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

- ۲۷۹ تا ۲۸۱ - لامتناہی حاصل ضربوں کا استنتاج - ۵۸۰
- ۲۸۲ تا ۲۹۲ - جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا - ۵۸۹
- ۲۹۲ (۱) - قوت تا قاعل کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا - ۶۰۸
- ۲۹۳ تا ۲۹۵ - ماس، ماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کے لیے جملے - ۶۰۹
- ۲۹۶ تا ۲۹۹ - دلیل کی قوتوں میں ماس، ماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کو بیان کرنا - ۶۱۷
- ۳۰۰ - لوکار تھی جیب اور جیب التمام کے لیے جملے - ۶۲۷
- ۳۰۱ - مثالیں - ۶۳۳
- سترہویں باب پر مثالیں - ۶۳۶

اٹھارواں باب

مسلل کسیر

- ۳۰۲ تا ۳۰۴ - II کے غیر منطبق ہونے کا ثبوت - ۶۴۵
- ۳۰۴ - دو طوی ہندی سلسلوں کے خارج قیمت کا استحالہ - ۶۴۷
- ۳۰۵ - یوکر کا استحالہ - ۶۴۹
- اٹھارویں باب پر مثالیں - ۶۴۹
- تفرق مثالیں - ۶۵۱

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

(۱۰۶)

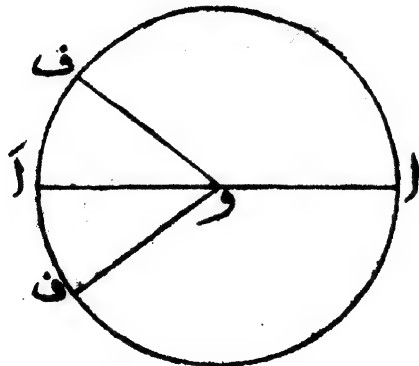
۱۔ علم مثلث مستوی کا اولین مقصد، مستوی مثلثوں کو حل کرنیکا طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاوئے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقداریں دی جائیں اور ان دے ہوئے اجزاء میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعیین کرنا ممکن ہے، اس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ علم مثلث مستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاوئی مقدار کے بعض تفاعلوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا، یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اس طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں ان دائری تفاعلونکے خواص کی تحقیق اور تجلیلی اور ہندسی تحقیقاتوں میں ان خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رکھتے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ سر اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب کے سب دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے مقاصد کے لئے زاویہ مقدار کے تخمین کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہو جائیں۔

فرض کرو کہ W ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم WF جو ابتدا میں W پر منطبق ہوتا ہے نقطہ W کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ WF کی تکوین کرتا ہے اور جب WF W پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کر چکتا ہے اور پھر اگر وہ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر آگے W پر منطبق ہوتا ہے، اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ WF اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور W کے گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاویے طے کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل WF میں ٹک جائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کر چکا ہوگا جو W کے محل کے

(2)



مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے لیکن یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ قمر مثبت ہے جبکہ \angle مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ \angle اسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویہ کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب، \angle ، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:- اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چلتی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی، لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاویے مثبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل ادھر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقع گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

(3) ۳۔ فرض کرو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل) \angle ہے۔ وہ زاویہ جو اس نے محل \angle سے محل \angle تک گھومنے میں مرتبہ کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ ان مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم ان تمام زاویوں کو جو خطوط \angle ، \angle سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاویے کہیں گے اور انکو (\angle ، \angle)

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (ز، و ف) میں سے مقداراً چھوٹے سے چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ ز و ف ہے، اور باقی سب زاوئے 'زاوئے ز و ف' کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

زاویوں کی عددی پیمائش

۴۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے کیا مراد ہے دوسرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیے جو مستقل مقدار کا اختیاری طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش ان نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی مقدار کے زاوئے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسر دوں سے تعبیر ہونگے اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے عام طور پر جو اکائی مستقل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نو دواں حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ درجوں کے زاویہ کو ڈی سے تعبیر کیا جاتا ہے، م و دقیقوں کے زاویہ کو م و ثانیوں کے زاویہ کو ثانیہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اس طرح زاویہ ذ م ن سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں درجے ۴ دقیقے ۴ ثانیہ شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

$$\frac{2}{90} + \frac{4}{90 \times 60} + \frac{4}{90 \times 60 \times 60} \text{ کے مساوی ہے۔}$$

زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً

$$\frac{5454}{40 \times 40 \times 40} + \frac{12}{40 \times 40} + \frac{23}{40} \text{ زاویہ قائمہ کا } 5454^{\circ} 12' 23''$$

ہے۔

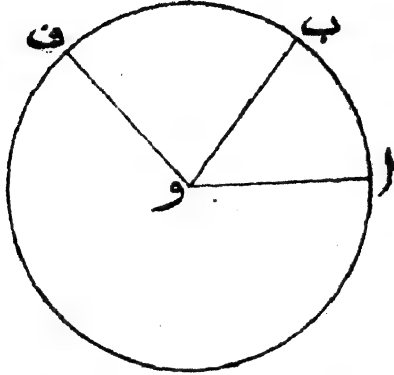
(۴) یہ تجویز پیش تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام

استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گ م ن لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ ۱۳ ۹۷ ۲۰ زاویہ قائمہ کے ۱۳۶۹۰۰۰ کے مساوی ہے۔ لیکن یہ نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تا وقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے علاوہ کوئی اور نہ کیجائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جاسکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں اور یہ امر وقت پیمائش میں تغیر کرنے کو مستلزم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا ایک گھنٹہ طول بلد کے ۱۶ مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چار قائمہ زاویوں کی ۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص علمی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ ہولت بخش ہے کسی دائرہ میں جس کا مرکز و ہے فرض کرو کہ لب ایک توس ہے جس کا طول



دائرے
کے نیم قطر
کے مساوی
ہے تو ہم
نسبت
کریں گے
کہ زاویہ
اوب

کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہو اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی انکائی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو انکائی زاویہ کے ساتھ ہو اور یہ نسبت زاویہ کا دائری ناپ کہلائیں گی۔

۶۔ اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے:-

(۱) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے محاذی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (۱) تقلید سے مقدمہ ششم مسئلہ ۳۳ میں سے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس } ا ب}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ } اوب}{\text{تمام زاویہ}}$$

چونکہ قوس ا ب دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک

ہی ہے، اس لئے ناویہ اوب مستقل مقدار کا ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔

۷۔ آئیے چل کر یہ بتایا جائے گا کہ حائرہ کے محیط اور اس کے قطر میں جو نسبت ہوتی ہے وہ ایک غیر منطوق عدد ہے، یعنی ہم صحیح اعداد میں اور نہ معلوم نہیں کر سکتے ایسے کہ $\frac{1}{2}$ ٹھیک ٹھیک اس نسبت کے مساوی ہو۔ ہم کسی آئینہ باب میں وہ مختلف طریقے بیان کریں گے جو اس نسبت کی قیمت تقریبی طور پر محسوب کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔ یہ نسبت بالعموم π سے تعبیر کیجاتی ہے۔ فی الحال یہ کہنا کافی ہے کہ π صرف ایک غیر مختتم غیر متوالی اعشاریہ کی شکل میں حاصل کیا جاسکتا ہے اور اس کی قیمت اعشاریہ کے بیس مقامات تک یہ ہے

۳۵۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۶۹۳۲۳۸۴۶
اکثر تقریبی قیمت ۳۵۱۴۱۵۹ کا استعمال کرنا کافی ہوگا۔ نسبتیں

$$\frac{۲۲}{۷} = ۳ \text{ } ۱۴۲۸۵۶ \text{ ، } \frac{۲۵۵}{۱۱۳} = ۲ \text{ } ۲۲۹۹۱۰۱۴$$

کے طور پر استعمال کیا جاسکتی ہیں کیونکہ وہ علی الترتیب اعشاریہ کے دو اور چھ مقامات تک ۲۲ کی صحیح قیمت کے مطابق ہیں۔

۸۔ ہم بتا چکے ہیں کہ نیم قطری کو چار قائمہ زاویوں کے ساتھ دہری نسبت ہے جو ایک دائرہ کے نصف قطر کو اس کے محیط کے ساتھ ہے۔

پس نیم قطری $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہے، اب چونکہ زاویہ

قائمہ ۹۰ کا ہوتا ہے اس لئے ۲۲ کی تقریبی قیمت ۳۱۵۹۲۰ استعمال کرنے سے، ہمیں نیم قطری کی تقریبی قیمت درجوں میں

(۵) ۶۹۶، ۲۹۵، ۵۰۰ حاصل ہوتی ہے یعنی درجہ کے اعشاری حصہ کو
دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرنے سے ۵۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰ -

گلشیر (Glaisher) نے نیم قطری کی قیمت تانینوں میں اعصاب

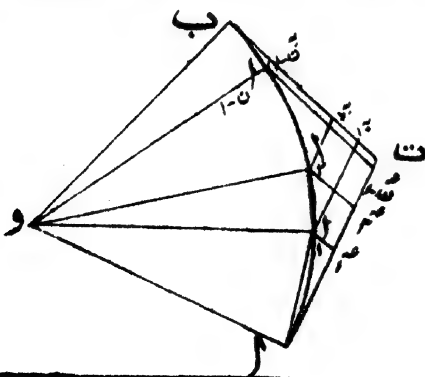
کے مساوی ہے، کیونکہ یہ نسبت $\frac{\text{قوس ا ف}}{\text{قوس ا ب}} = \frac{\text{زاویہ ا و ف}}{\text{زاویہ ا و ب}}$ کے مساوی ہے۔

قوس ا ف پورے محیط سے بڑی ہو سکتی ہے اور اس کو مثبت یا منفی طور پر ناپا جاسکتا ہے اس سمت کی بموجب جس میں وہ ابتدائی نقطہ ا سے ناپی گئی ہے؛ اس طرح کسی مقدار کے زاویہ کا دائری ناپ وہ نسبت ہے جو اس قوس کے طول کو جس کے محاذی زاویہ بنتا ہے دائرے کے نیم قطر کے ساتھ ہے۔ نیم قطر والے دائرہ کی قوس کا طول رط ہوتا ہے جبکہ ط اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جو اس قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا پورا محیط 2π رہے۔

دائرہ قوس کا طول

(7)

۱۱۔ اوپر یہ مان لیا گیا ہے کہ دائری قوس کا طول وجود رکھتا ہے اور قوس کی عددی پیمائش ہو سکتی ہے، اس امر کی اب تحقیق کی جائے گی۔ طول کا اصلی تخیل ایک خطی قطعہ کا تخیل ہے یعنی خط مستقیم کا ایک محدود حصہ، اور منحنی کی قوس کے طول مثلاً دائری قوس کا طول کے تخیل کو اس سے ماخوذ سمجھنا چاہیے۔ ہم تسلیم کر لیں گے کہ خط مستقیم کے ایک دے ہوئے محدود حصہ کا طول وجود رکھتا ہے اور اسے ایک محدود منطق یا غیر منطق عدد سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جو طول کی کسی مقررہ اکائی پر منحصر ہوتا ہے۔ اب دائری قوس ا ب کے طول کو معلوم کرنے کے لئے ہم منبیل



عمل کرتے ہیں :- فرض کرو کہ قوس AB متعدد نقطوں $A, P_1, P_2, \dots, P_n, B$ پر تقسیم کی گئی ہے، اندرونی نابند کثیر ضلعی $AP_1P_2 \dots P_nB$... AB پر غور کرو۔
 اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ $AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_nB$...
 AB کی ایک محدود قیمت s ہے۔ پھر قوس AB کے اندر
 ایک نیا کثیر ضلعی $AP_1P_2 \dots P_nB$... AB بناؤ جس میں n کن اور اس
 کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی $AP_1P_2 \dots P_nB$... B کے بڑے سے
 بڑے ضلع سے چھوٹا ہو، فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں
 کا مجموعہ s ہے۔ اسی طرح قوس AB کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری
 رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جس کے
 ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد s, s, s, \dots ... s کے
 ایک تواتر سے تبذیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا
 جاسکتا ہے۔ اگر عدد s کی ایک معین انتہا ہو جو قوس AB کی
 متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اس شرط
 کے تحت ہو کہ s کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع
 لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ n لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس
 AB کا طول s ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول
 رکھتی ہے یہ دکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا موجود ہے، اور اب ہم
 اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر AB ج ایک
 قوس ہو اور AB ، B ج کے طول معین ہوں تو AB ج کا طول بھی
 معین ہوگا، اور AB ج کا طول قوسوں AB ، B ج کے طولوں
 کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ
 سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر ضلعیوں کے اس
 مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ ان نابند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو
 ف_۱، ف_۲، ...، ف_n سے تعبیر کر کے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ
 ف_۱ > ف_۲ > ... > ف_n ...

عمل کرتے ہیں :- فرض کرو کہ قوس AB متعدد نقطوں $A, P_1, P_2, \dots, P_n, B$ پر تقسیم کی گئی ہے، اندرونی نابند کثیر ضلعی $AP_1P_2 \dots P_nB$ اور AB پر غور کرو۔ اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ $AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_nB$ کی ایک محدود قیمت s ہے۔ پھر قوس AB کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی $AP_1'P_2' \dots P_n'B$ بناؤ جس میں P_1, P_2, \dots, P_n اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی $AP_1'P_2' \dots P_n'B$ کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو، فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ s' ہے۔ اسی طرح قوس AB کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جس کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد s, s', s'', \dots کے ایک تواتر سے تقبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اگر عدد s کی ایک معین انتہا ہو جو قوس AB کی متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اس شرط کے تحت ہو کہ s کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ s لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس AB کا طول L ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا بال موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر AB ج ایک قوس ہو اور AB ، B ج کے طول معین ہوں تو AB ج کا طول بھی معین ہوگا، اور AB ج کا طول قوسوں AB ، B ج کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر ضلعیوں کے اس مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ ان نابند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو
 ف، ف، ف، ... ف، ... سے تعبیر کر کے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$ف > ف > ف > ... > ف > ...$$

کیونکہ مبادی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $لر$ $لر$ $لر$ $لر$ طول میں $لر$
 اور $لر$ کو لانے والے ایک نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے
 نیز اعداد ف، ف، ف، ... ف، ... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم
 ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس اب کے سروں اب پر راس ت ا،
 ت ب ہیں، ب ت کے متوازی ل عم، ... ل ن۔ ل ن۔ کھینچو اور نیز
 ت کے متوازی ل ب، ل ب، ... ل ن۔ ل ن۔ کھینچو۔

$$ل ب > ل عم + ل عم > ل عم + ت ب$$

اور $ل ب > ل عم + ل عم + ل ب، ل ب،$ وغیرہ

$$ل ب + ل ب + ل ب + ... + ل ن۔ ب > ل ت + ب ت$$

$$ف > ل ت + ب ت$$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بوجہ، چونکہ
 عددوں ف، ف، ف، ... ف، ... کا قوتاً ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد

والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے
 کم ہیں اسلئے قوتاً کی ایک انتہا ہے ایسی کہ اگر وہ ایک اختیار ہی
 مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک خاص قیمت ن ایسی دریا
 ہو سکتی ہے کہ اس سے بڑی ن کی تمام قیمتوں کے لئے ف ن کال سے

کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طولوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو مرکز پر ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ دو دائرے ہیں جن کے قطری اورقی ہیں اگر دو متساویہ کثیر ضلعی ان دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متساویہ مستقیم الاضلاع اشکال کے خواص کی بنا پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر الاضلاعوں کے کثیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو قی اور قی میں ہے۔ اب دائروں کے محیط مراد رکھو ان انتہاؤں کے برابر سمجھا جاسکتا ہے جو کثیر الاضلاعوں کے دو تواتروں کے کثیروں فن، فن کی ہیں جبکہ فن کے متناظر کثیر ضلعی، فن کی ہر قیمت کے لئے، اس کثیر ضلعی کے متساویہ ہو جو فن کے جواب میں ہے۔ اب

(۱۵)

چونکہ فن : فن = ق : قی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فن کی انتہا کو فن کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت ق : قی کے مساوی ہے؛ اور اس لئے

$$\text{مر : ق} = \text{ق : قی}$$

دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۳۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز وہ ہے۔ اس کی کسی قوس اب سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی بتائی ہے کہ یہ مثلثوں $\Delta A_1 P A_2$ ، $\Delta A_2 P A_3$ ، ... $\Delta A_n P A_1$ اب کے رقبوں کے مجموعے کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ اب کے ضلعوں کی تعداد لا انتہا بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱) میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

معین عدد کے برابر ہے۔
 فرض کرو کہ وہ سے ضلعوں $۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰$ ب پر عمود کیجئے
 گئے ہیں اور ان کے طول $۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰$ ق ہیں، تب مثلثوں کے
 رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} (۱۱ \times ۱۱ + ۱۲ \times ۱۲ + ۱۳ \times ۱۳ + ۱۴ \times ۱۴ + ۱۵ \times ۱۵ + ۱۶ \times ۱۶ + ۱۷ \times ۱۷ + ۱۸ \times ۱۸ + ۱۹ \times ۱۹ + ۲۰ \times ۲۰)$$

اور یہ مجموعہ، $\frac{1}{2} ۱۱ \times ۱۱ + ۱۲ \times ۱۲ + ۱۳ \times ۱۳ + ۱۴ \times ۱۴ + ۱۵ \times ۱۵ + ۱۶ \times ۱۶ + ۱۷ \times ۱۷ + ۱۸ \times ۱۸ + ۱۹ \times ۱۹ + ۲۰ \times ۲۰$ اور $\frac{1}{2} ۱۱ \times ۱۱ + ۱۲ \times ۱۲ + ۱۳ \times ۱۳ + ۱۴ \times ۱۴ + ۱۵ \times ۱۵ + ۱۶ \times ۱۶ + ۱۷ \times ۱۷ + ۱۸ \times ۱۸ + ۱۹ \times ۱۹ + ۲۰ \times ۲۰$ کے درمیان واقع ہوتا
 ہے جہاں ۱۱ اور ۲۰ عددوں $۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰$ ق میں سے علی الترتیب
 بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور ۱۱
 کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔ ۱۱ کی انتہا موجود ہے کیونکہ
 یہ قوس ۱۱ کا طول ہے۔ نیز عددوں $۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰$ ق کی ایک ہی انتہا ہے
 اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے، کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں
 کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس
 قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر اور قوس
 ۱۱ کے طول ۱۱ کے نصف حاصل ضرب کے مساوی ہے، جہاں
 $\frac{1}{2}$ زاویہ ۱۱ کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ $۱۱ =$
 $\frac{1}{2} ۱۱ \times ۱۱$ پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو محدود کرنیوالی
 قوس پورا محیط ہے؛ پس پورے دائرہ کا رقبہ π ر ہے۔

باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمائش کی اکائی کیا جونی چاہئے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا
 عددی ناپ اس فرق کے مساوی ہو سکے جو درجوں اور دائری ناپ
 میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

۱ ج = جب (عہ + ہ) = ا ب = جب عہ، اور ج د = جم بہ؛ اس طرح مسئلہ بالا ضابطہ کے مائل ہے۔
 جب (عہ + ہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

(۲) فرض کر دو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
 ۱ ج د = ہ، تو ا ب = جب (عہ - ہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ
 جب (عہ - ہ) + جب بہ جم عہ = جم بہ جب عہ کے مائل ہے۔

(۳) فرض کر دو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = عہ،
 زاویہ ج ب د = ہ، تو ا د ج = $\frac{1}{4}\pi$ + عہ - ہ، اس طرح ۱ ج =
 جم (عہ - ہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جم (عہ - ہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ کے مائل ہے۔

(۴) فرض کر دو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
 ا د ج = ہ، تب ب ج د = عہ + ہ - $\frac{1}{4}\pi$ ، ا ب = جم (عہ + ہ) اور
 مسئلہ بالا ضابطہ

جم (عہ + ہ) + جم عہ جم بہ = جب عہ جب بہ کے مائل ہے۔

مشال :- سائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو:-

جب عہ جب (ہ - ج) + جب بہ جب (جہ - عہ) + جب جہ جب (عہ - ہ) =

جب (عہ + ہ) جب (ہ + ج) = جب عہ جب جہ + جب بہ جب (عہ + ہ + ج)

دو چوب یا دو چوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطے

۴۴۔ جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب،

$\text{جم} (ا + ب) + \text{جم} (ا - ب) = ۲ \text{ جم} ا$ جم ب
 $\text{جم} (ا - ب) - \text{جم} (ا + ب) = ۲ \text{ جم} ا$ جب ب
 فرض کر $ا + ب = ج$ ، $ا - ب = د$ ، تو چونکہ $ا = \frac{۱}{۲} (ج + د)$ اور
 $ب = \frac{۱}{۲} (ج - د)$ اس لئے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔
 $\text{جب ج} + \text{جب د} = ۲ \text{ جب} \frac{۱}{۲} (ج + د)$ جم $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۵)
 $\text{جب ج} - \text{جب د} = ۲ \text{ جم} \frac{۱}{۲} (ج + د)$ جب $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۶)
 $\text{جم ج} + \text{جم د} = ۲ \text{ جم} \frac{۱}{۲} (ج + د)$ جم $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۷)
 $\text{جم د} - \text{جم ج} = ۲ \text{ جب} \frac{۱}{۲} (ج + د)$ جب $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۸)

(42) یہ اہم ضابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیب یا جیب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تغالوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں، ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

دو زاویوں کی جیب کا مجموعہ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔

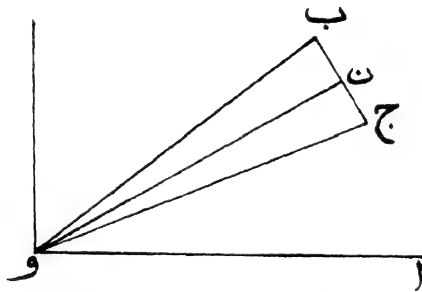
دو زاویوں کی جیب کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب التمام کا مجموعہ، ان زاویوں کے

نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب التمام کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُلے نصف فرق کی جیب کے دوچند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵۔ یہ ضابطے ہندسی طور پر غلطوں کے طریقہ سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔



فرض کرو کہ ب و ا = ج، ج و ا = د، اور فرض کرو کہ د ب = و ج،
ب ج پر عمود و ن کھینچو تو ن ب ج کا نقطہ وسطی ہے، نیز

ن و ا = $\frac{1}{2}$ (ج + د) ، ن و ب = ن و ج = $\frac{1}{2}$ (ج - د)
اب و ا پر و ب اور و ج کے ظلوں کا مجموعہ، و ا پر و ن، ن ب،
و ن اور ن ج کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور
ن ج کے ظل مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ و ن کے
ظل کے دوچند کے مساوی ہے۔ اس لئے
د ب جم + و ج جم = د ۲ و ن جم $\frac{1}{2}$ (ج + د)

اور چونکہ

$$\text{ون} = \text{وب} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$$

اس لئے ضابطہ

$$(43) \quad \text{جم ج} + \text{جم د} = 2 \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (4)$$

حاصل ہوتا ہے۔
اگر وہاں پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوالم خط پر ظل لئے جائیں تو
وب جب ج + وج جب د = 2 ون جب $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$
اس لئے

$$(5) \quad \text{جب ج} + \text{جب د} = 2 \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (5)$$

نیز وہاں پر وج کا ظل = وب کا ظل + ب ن کے ظل کا دو چہند
یعنی

$$\text{وج جم د} = \text{وب جم ج} + 2 \text{ ب ن جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$$

اس لئے جم د - جم ج = 2 جب $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$ جب $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$ (۸)
اور اگر ہم وہاں پر کے عمود پر ظل لیں تو

$$(6) \quad \text{وج جب د} = \text{وب جب ج} - 2 \text{ ب ن جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \dots \dots (6)$$

یا جب ج - جب د = 2 جب $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$ جم $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$ (۶)
نو کار متوں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جو ب کی
جدولوں کے ذریعہ مرتب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

$$\text{جب } 1 \text{ جب } 2 = \frac{1}{2} \{ \text{جم } (1 - 2) - \text{جم } (2 + 1) \}$$

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاوئے ۱ اور ۲ جن کی جو ب، علامت اعشاریہ کو نکال دینے
کے بعد، ان اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو مرتب دینا مقصود ہوتا ہے جو ب کی ایک
جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (۱ + ۲) ،
جم (۱ - ۲) معلوم ہو سکتی ہیں، ان آخری جو ب التمام کے فرمی کا نصف مطلوبہ

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو $\pi p o r s a \phi a l p e s i s$ کہتے تھے۔ گلیشر
 کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry"
 میں جو فلا سینکل میگزین ہفتہ شمارہ میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

امثلہ

۱۔ ثابت کرو مثلاً

$$\begin{aligned} & \text{جب } (ب-ج) \text{ جب } (ب+ج-ل) + \text{جب } (ب-ج-ل) \times \\ & \text{جب } (ج+ل-ب) + \text{جب } (ج-ب) \text{ جب } (ل+ب-ج) \\ & = ۲ \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ل) \text{ جب } (ل-ب) \\ & \text{دائیں جانب کی دوسری اور تیسری ارقام لکھی جاسکتی ہیں} \\ & \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ل) - \text{جم } (ج-ب) + \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ج-ب) \text{ جب } (ج-ل) - \text{جم } (ج-ب) \\ & \text{جم } (ج-ل) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{اور یہ } = \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ب-ل) + \text{جب } (ل-ب) - \text{جب } (ج-ل) - \text{جب } (ل-ج) \\ & + \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ج-ب) + \text{جب } (ب-ج) - \text{جب } (ل-ب) - \text{جب } (ج-ل) \\ & = \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ج-ب) - \text{جب } (ج-ل) - \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ج-ب) + \frac{۱}{۲} \text{ جب } (ب-ل) - \text{جب } (ج-ل) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \text{جب } (ب-ج) \left(\frac{۱}{۲} \text{ جم } (ب+ج) - \text{جم } (ب-ج) \right) + \frac{۱}{۲} \text{ جم } (ب+ج-ل) - \text{جم } (ب-ج-ل) \\ & \text{جو } = \text{جب } (ب-ج) \left(\text{جم } (ب+ج) - \text{جم } (ب-ج) \right) - \text{جم } (ب-ج-ل) \\ & \text{اس میں رقم جب } (ب-ج) \text{ جب } (ب+ج-ل) \text{ جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے} \\ & \text{جب } (ب-ج) \left(\text{جم } (ب+ج-ل) - \text{جم } (ب-ج) \right) \\ & \text{یعنی } ۲ \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ل) \text{ جب } (ل-ب) \\ & (۲) - \text{ثابت کر دو} \end{aligned}$$

$$\text{جم } (ب-ج) \text{ جب } (ب+ج-ل)$$

۲ = جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)
 اسکو مثال (۱۱) سے ا، ب، ج کو ۹۰، ۹۰، ۹۰ - ب، ج - ج
 میں تبدیل کر کے اخذ کیا جاسکتا ہے، یا بلا واسطہ مثال (۱۱) کی طرح ثابت
 کیا جاسکتا ہے -
 متاثلات ذیل ثابت کرو:

$$(۳) \quad \angle \text{جب ا جب (ب - ج)} = \angle \text{جب ا جب (ب - ج)} =$$

$$(۴) \quad \angle \text{جب (ب + ج) جب (ب - ج)} = \angle \text{جب (ب + ج) جب (ب - ج)} =$$

$$(۵) \quad \angle \text{جب ب جب ج جب (ب - ج)} = \angle \text{جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)}$$

$$\angle \text{جب ب جب ج جب (ب - ج)} = \angle \text{جب (ب - ج) جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)}$$

$$(۶) \quad \text{اگر } \angle \text{ب + ج} = \angle \text{ا + ج} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\angle \text{ب} = \angle \text{ا} + \angle \text{ب} + \angle \text{ج} - \angle \text{ب} - \angle \text{ج} = \angle \text{ا}$$

$$\text{اور } \angle \text{ا} = \angle \text{ا} - \angle \text{ب} - \angle \text{ج} + \angle \text{ا} + \angle \text{ب} + \angle \text{ج} = \angle \text{ب}$$

مشقی متاثلات کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے جبری متاثلات کے ماثل ہے
 مثلاً حسب ذیل جبری متاثلات مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں ہیں:-

$$\angle \text{ا} (\angle \text{ب - ج}) (\angle \text{ب + ج} - \angle \text{ا}) = \angle \text{ب} (\angle \text{ج - ا}) (\angle \text{ج - ا} - \angle \text{ب})$$

(۱) اور (۲) کے جواب میں

$$\angle \text{ا} (\angle \text{ب - ج}) = \angle \text{ب} (\angle \text{ج - ا}) \text{ کے جواب میں ؛}$$

$$\angle \text{ب} (\angle \text{ج - ا}) (\angle \text{ب - ج}) = \angle \text{ج} (\angle \text{ا - ب}) (\angle \text{ا - ب} - \angle \text{ج}) \text{ کے جواب میں ؛}$$

$$\angle \text{ب} (\angle \text{ج - ا}) = \angle \text{ج} (\angle \text{ا - ب}) (\angle \text{ا - ب} - \angle \text{ج}) \text{ کے جواب میں}$$

لے ایسی مطابقت کی ایک کثیر تعداد ایم۔ گیلن (M. Gelin) نے "Matheris" جلد دوم میں دی ہے -

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

۴۶۔ جب اور جب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے ماس یا ماس التمام کے لئے ان زاویوں کے ماس یا ماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس (ا ± ب)} = \frac{\text{جب (ا ± ب)}}{\text{جم ا جم ب ± جم ا جب ب}} = \frac{\text{جم ا جم ب ± جم ا جب ب}}{\text{جم ا جب ب}}$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور بسب نام کو جم ا جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{\text{جم ا جب ب} \pm \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ب}}}{\text{جم ا جب ب}} = \text{مس (ا ± ب)}$$

$$= 1 \pm \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جب ب}}$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$\text{مس (ا + ب)} = \frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{ا - مس ا مس ب}} \quad (۹)$$

$$\text{مس (ا - ب)} = \frac{\text{مس ا - مس ب}}{\text{ا + مس ا مس ب}} \quad (۱۰)$$

اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

(۴۵)

$$\text{مم (ا + ب)} = \frac{\text{مم ا مم ب - ا}}{\text{مم ا + مم ب}} \quad (۱۱)$$

$$\text{مم (ا - ب)} = \frac{\text{مم ا مم ب + ا}}{\text{مم ا - مم ب}} \quad (۱۲)$$

ضوابط (۹) تا (۱۲) ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے ہیں۔

مختلف ضوابط

۴۷۔ حسب ذیل ضوابط اُن ضابطوں سے اخذ کئے جاسکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں۔
یہ ضابطے استحالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔
طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کر لینی چاہیئے۔

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جب } ا - \text{جب } ب \dots (۱۳)$$

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جب } ا - \text{جب } ب \dots (۱۴)$$

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جب } ا - \text{جب } ب \dots (۱۵)$$

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جب } ا - \text{جب } ب \dots (۱۶)$$

$$\text{جب } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۱۷)$$

$$\text{جب } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۱۸)$$

$$\text{مس } ا \pm \text{مس } ب = \frac{\text{جب } (ا + ب)}{\text{جب } ا - \text{جب } ب} \dots (۱۹)$$

دو جیب یا جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں فوراً حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{جب } ا + \text{جب } ب = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا + ب)} = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۲۰)$$

$$\text{جب } ا - \text{جب } ب = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا + ب)} \dots (۲۱)$$

۳ (ا + ب + ج - ا) - ۲ (ب ج = (ب + ج - ا) (ج + ا - ب) (ا + ب - ج) کے جواب میں -

تین زاویوں کے لئے جمع کے ضابطے

۴۸ - جمع کے ضابطوں (۱۱) اور (۲) کی مدد سے ہم تین زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کو ان زاویوں کے تفاعلوں کی رقم میں بیان کر سکتے ہیں، چنانچہ

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج
= (جم اجم ب + جم اجم ب) جم ج + (جم اجم ب - جب اجم ب) جب ج
جم (ا + ب + ج) اور

= جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج
= (جم اجم ب - جب اجم ب) جم ج - (جم اجم ب + جب اجم ب) جب ج
جب (ا + ب + ج) پس

= جب اجم ب جم ج + جب ب جم ج + جب ج جم اجم ب
- جب اجم ب جب ج - جب اجم ب جب ج - جب اجم ب جب ج (۲۴)
اور جم (ا + ب + ج)

= جم اجم ب جم ج - جم اجم ب جب ج - جم ب جب ج جب ا
- جم ج جب اجم ب - جب ج جب اجم ب - جب ج جب اجم ب (۲۵)
ضابطوں (۲۴) اور (۲۵) کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

جب (ا + ب + ج)
= جم اجم ب جم ج (مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج)
اور جم (ا + ب + ج)

= جم اجم ب جم ج (ا-ب مس ج-مس ج مس ا-مس ا مس ب)
پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے
مس (ا+ب+ج)

$$= \frac{\text{مس ا+مس ب+مس ج-مس ا مس ب مس ج}}{\text{مس (ا+ب+ج)}}$$

ا-مس ب مس ج-مس ج مس ا-مس ا مس ب
اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہو سکتا ہے

م (ا+ب+ج)

$$(۲۷) \quad \frac{\text{مم ا مم ب مم ج-مم ا-مم ب-مم ج}}{\text{مم ب مم ج+مم ج مم ا+مم ا مم ب-۱}}$$

مثالیں

۱- ثابت کرو کہ مس (۲۵+۱) = مس (۲۵-۱) = ۲ مس ۲

۲- ثابت کرو کہ اگر ۱+ب+ج = ن ۱۱ تو

مس ا+مس ب+مس ج-مس ا مس ب مس ج =

۱+ب+ج = (۱+۲) ۱۱ تو

مس ب مس ج+مس ج مس ا+مس ا مس ب = ۱

اور ماس اتمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۹- یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری
تفاعلوں کے لئے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں، اور پھر پانچ زاویوں
کے حاصل جمع کے لئے، اور علی ہذا۔ استقراء کے طریقہ سے ہم ثابت
کریں گے کہ ن زاویوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کے حاصل جمع کی جیب

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں

(۲۸) $-j_1 + j_2 - j_3 = (j_1 + \dots + j_p + j_{p+1})$ جب

(۲۹) ... $-T_2 + T_1 - T_0 = (J_0 + \dots + J_1 + J_2)$ حجم

جہاں جڑ سے n زاویوں میں سے r کی جیوب اور باقی $n - r$ زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور n زاویوں میں سے r زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کیئے گئے ہیں، پس

ج. = جم + جم + ... جم لن

ج = جب ل ج م ل ج م ل ... جم ل ن + جم ل ج ب ل ج م ل ... جم ل ن ...

ضوابط (۲۸) اور (۲۹) صورتوں $n = 2$ ، $n = 3$ کے لئے ضابطوں
(۱)، (۲) اور (۲۴)، (۲۵) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے n زاویوں
کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ، $(n + 1)$ زاویوں کے
لیے بھی درست ہیں، اس

جب $(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r + 1)$

$$= \text{جیب} (1 + \dots + \text{جیب } n) + \text{حجم} (1 + \dots + \text{جیب } n) + \text{جیب } n + 1$$

$$= \text{جم لکھنا } (ج - ج - ج) + \text{جب لکھنا } (ج - ج + ج) \dots$$

فرض کرو کہ حجر سے زاویوں $1, 2, 3, \dots, n$ میں سے r زاویوں کی جیوب اور باقی $n + 1 - r$ زاویوں کی جیوب انعام کے حامل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ $n + 1 - r$ زاویوں میں سے r زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہوں۔ تب

جون زاویوں کے مجموعہ کے ماس کو ان زاویوں کے ماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ضابطہ (۳۰) کو باواسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\frac{\text{ماس} (1 + 2 + \dots + n) = \text{ماس} (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس} (n + 1)}{\text{ماس} (1 + 2 + \dots + n) = \text{ماس} (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس} (n + 1)}$$

$$\frac{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}$$

اب اگر ن + ۱ زاویوں میں سے ر زاویوں کے ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع م سے تعبیر ہو تو

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= 1 \\ 1 + 2 + \dots + n &= 2 \\ 1 + 2 + \dots + n &= 3 \end{aligned}$$

$$\frac{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}$$

اور چونکہ ضابطہ (۳۰) ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا

(50)

۵۰۔ ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں۔
مثلاً

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= \text{جب } (۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱) \\
 ۳ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } \{ \text{جب } (۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱) \} \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ - ۱) \\
 &= ۳ \text{ جب } (۱ - ۱ + ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ - ۱) \\
 ۴ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۲ \text{ جب } (۱ - ۱ + ۱) \text{ جب } ۱ + \dots \\
 &- ۲ \text{ جب } (۱ + ۱ - ۱) \text{ جب } ۱ \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ + ۱ - ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) \\
 &- \text{جب } (۱ + ۱ - ۱ - ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) \\
 &= \text{جب } (۱ + ۱ - ۱ + ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) \\
 &+ \frac{1}{۲} \text{ جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱)
 \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= \text{جب } (۱ - ۱) + \text{جب } (۱ + ۱) \\
 ۳ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۲ \text{ جب } (۱ - ۱) \text{ جب } ۲ \text{ جب } (۱ + ۱) \text{ جب } ۱ \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱)
 \end{aligned}$$

$$= ج_ن + ج_{ن-۱} + \dots + ج_۱ + ج_۰ \quad (۱-ن) \quad (۳۳)$$

ضابطوں (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) کو اوپر $ن = ۳، ۴، ۵$ کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱) $ن$ زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو ۲ جب $۱+$ سے ضرب دو اور کسی رقم ۲ $ج_ن$ - $ج_۱$ کی بجائے $ج_۱$ کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(۱-۲) ج_۱ ج_۲ ج_۳ \dots ج_۱ ج_۲ ج_۳$$

کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ج_ن - ج_{ن-۱} + \dots + ج_۱ - ج_۰ \quad (۱-۲) \quad (۳۴)$$

جہاں $ج_۰$ حاصل جمع ہے $ج_ن + ۱$ زاویوں میں سے ۱ زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی $ج_۱$ کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) ہو جاتا ہے جبکہ اس میں $ن$ کو $۱+$ میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(۱-۲) ج_۱ ج_۲ ج_۳ \dots ج_۱ ج_۲ ج_۳$$

$$= ج_ن - ج_{ن-۱} + \dots + ج_۱ - ج_۰ \quad (۱-۲) \quad (۳۵)$$

جہاں $ج_۰$ ، $ن + ۲$ زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱) قیمت $ن + ۲$ کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت $ن$ کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲)، $ن + ۲$ زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطہ $ن = ۳، ۴$ کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ جب } n \text{ زوج } \dots (۴۰)$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰)، (۲۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۴۹ میں ج ر میں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور ج ر

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{24} \text{ جب } n \text{ زوج } \dots (۴۱)$$

ضابطوں (۳۹) اور (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{جب } n = 1 = \text{جم } 1 \{n \text{ مس } 1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ مس } 2 + \dots\}$$

$$\text{جم } n = 1 = \text{جم } 1 \{n(n-1) \text{ مس } 1 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ مس } 2 + \dots\}$$

(53)

نیز (۹)، (۲۶) اور (۳۰) سے

$$\text{مس } 1 = \frac{\text{مس } 2}{1 - \text{مس } 1} \dots \dots \dots (۴۱)$$

$$\text{مس } 2 = \frac{\text{مس } 3 - \text{مس } 1}{1 - \text{مس } 3} \dots \dots \dots (۴۲)$$

$$\text{مس } n = 1 = \frac{n(n-1)(n-2) \dots \text{مس } 1}{1 - \frac{n(n-1) \text{ مس } 2}{24} + \dots \dots \dots (۴۳)}$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضعیف کے دائری تفاعلوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تواتروں

جب ۱، جب ۲، جب ۳،

جم ۱، جم ۲، جم ۳،

میں سے ہر ایک تواتر متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (ن+۱) = ۱ + جم ۱ جب ن = ۱ - جب (ن-۱) = ۱،

جم (ن+۱) = ۱ + جم ۱ جب ن = ۱ - جم (ن-۱) = ۱؛

پس ہر ایک تواتر کی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ماقبل رقم کو ۲ جم ۱ سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ماقبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے تواتروں کی ارتقام یکے بعد دیگرے محسوب کیجا سکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں -

اس لئے سلسلوں

۱ + لاجب ۱، لاجب ۲، لاجب ۳،، اور ۱ + لاجم ۱، لاجم ۲، لاجم ۳،

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱-۲ لاجم ۱ + لاجم ۲

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعیفی زاویوں

کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں جملے

۲- کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضعیفوں کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں جملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جب ۱ = ۱ - جم ۲

۴ جب ۱ = ۳ جب ۱ - جب ۳

۸ جب ۱ = جم ۲ - جم ۴ + ۱۲

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جم } ۱ &= ۱ + \text{جم } ۲ \text{ ل} \\
 ۴ \text{ جم } ۱ &= ۳ \text{ جم } ۱ + \text{جم } ۳ \text{ ل} \\
 ۸ \text{ جم } ۱ &= ۴ \text{ جم } ۲ \text{ ل} + ۴ \text{ جم } ۲ \text{ ل} + ۳ \\
 (۱-۲) \frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{اجب } ۱ &= \text{جم } ۱ \text{ ل} - \text{جم } (۲-۱) \text{ ل} + \frac{\text{ن} (۱-۲)}{۲} \text{ جم } (۲-۱) \text{ ل} \dots (54)
 \end{aligned}$$

$$(۳۳) \dots \dots \dots \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ن}}{۲} \text{ ل} + \frac{۱}{۲} (۱-۲) \text{ ل}} \dots \dots \dots \text{ (ن جنت) }$$

$$(۱-۲) \frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{اجب } ۱ = \text{جب } ۱ \text{ ل} - \text{جب } (۲-۱) \text{ ل} + \frac{\text{ن} (۱-۲)}{۲} \text{ جب } (۲-۱) \text{ ل} \dots$$

$$(۳۵) \dots \dots \dots \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ن}}{۲} (۱-۲) + \frac{۱}{۲} (۱+۲) \text{ ل}} \dots \dots \dots \text{ (ن طاق) }$$

$$۲-۱ \text{ جم } ۱ = \text{جم } ۱ \text{ ل} + \text{جم } (۲-۱) \text{ ل} + \frac{\text{ن} (۱-۲)}{۲} \text{ جم } (۲-۱) \text{ ل} + \dots$$

$$(۳۶) \dots \dots \dots \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ن}}{۲} \text{ ل} + \frac{۱}{۲} \text{ ل}} \dots \dots \dots$$

ن (جنت)

$$۲-۱ \text{ جم } ۱ = \text{جم } ۱ \text{ ل} + \text{جم } (۲-۱) \text{ ل} + \frac{\text{ن} (۱-۲)}{۲} \text{ جم } (۲-۱) \text{ ل} + \dots$$

$$(۳۷) \dots \dots \dots \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ن}}{۲} (۱-۲) + \frac{۱}{۲} (۱+۲) \text{ ل}} \dots \dots \dots \text{ (ن طاق) }$$

ضابطوں (۳۳) اور (۳۵) کو (۳۶) سے ان میں لڑکی بجائے

۹۰۔ لڑکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہو سکتا ہے۔ مزید برآں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دی جائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ

$$\text{مس}^1 + \text{مس}^2 \text{ب} = \text{مس}^3 \text{ا} \quad (\text{ا} + \text{ب} \text{ا} - \text{ا} - \text{ب})$$

میں اگر مس¹ اور مس² ب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ $\frac{1}{4}\pi$ سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

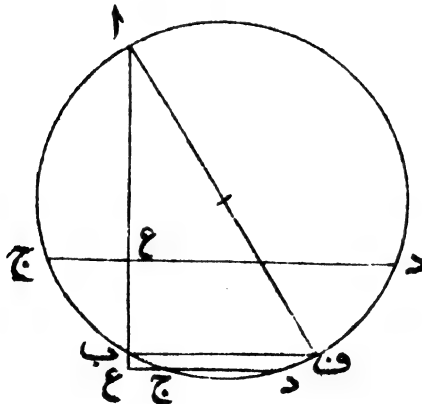
$$\text{مس}^1 (\text{ا} + \text{ب} \text{ا} - \text{ا} - \text{ب})$$

کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت، صفر اور $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان ایک زاویہ ہے جس کا عا¹س وہی ہے جو مس¹ اور مس² ب کا مجموعہ ہے۔

ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۴۵۔ اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جا سکتے ہیں، ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دی جائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بالعموم یہ ثبوت زاویوں کی صرف ایک محدود وسعت کے لئے درست ہوتے ہیں۔

(۱) ضابطہ مس (ا + ب) = مس¹ ا + مس² ب ثابت کرو۔



(58)

فرض کرو کہ ایک دائرے کے دو وتر AB ، CD ایک دوسرے کے علی التوا قائم ہیں، اور فرض کرو کہ زاویے ADC ، BAC کو A اور B سے تعبیر کیا گیا ہے، تو چونکہ

$$AC \times CB = AD \times DC \text{ اس لئے}$$

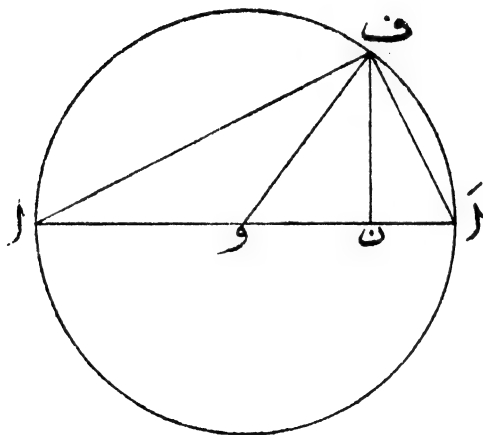
$$1 - \frac{AC \times CB}{AD \times DC} = \frac{AC \times CB}{AD \times DC} = \frac{AC \times CB}{AD \times DC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{MS}{AS} = \frac{MS}{BS} \quad MS (A \neq B)$$

(۲) منابط جب $2 = 1$ جب 2 جسم 1 ،

اور جسم $2 = 1$ جسم 1 - جب 1

ثابت کرو۔



فرض کرو کہ AD ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور F AD = AB F AD = 2 AD ، F AD پر عمود نکالو۔

تب جب $\frac{f_n}{\omega}$ لیکن $f_n \times \Delta t = \Delta f$ آ

$\text{رف} \times \text{فر}$

اس لئے جب $\frac{اف \times آف}{وف \times ارف} = \frac{اا \times آا}{وو \times اوو}$ جب $\frac{اا \times آا}{وو \times اوو} = \frac{اا \times آا}{وو \times اوو}$ ،

ترجمہ ۲ = $\frac{\text{ون}}{\text{دف}} = \frac{\text{ان}^۱ - \text{ان}^۲}{۲ \times \text{ار}^۲ \times \text{وف}} = \frac{\text{اف}^۱ - \text{اف}^۲}{\text{ار}^۲} = \text{جم}^۱ - \text{جم}^۲$

(۳) ضابطہ جب ۴ = ۳ جب ۱ - ۴ جب ۱ ،

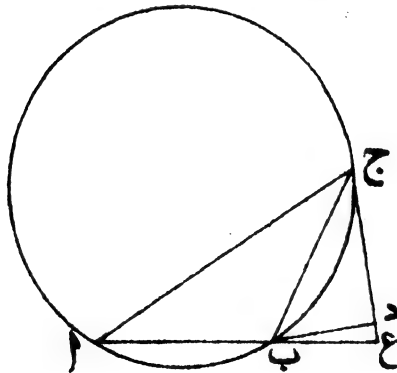
$$\text{جم ۳} = \text{جم ۲} - \text{جم ۱}$$

اور
کو ثابت کرو۔

فرض کرو کہ ج ا ب = ا ج ب = ا؛ مثلث ا ب ج کا بیرونی دائرہ
 کھینچو اور فرض کرو کہ ا ب، نقطہ ج پر کے طاس سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔
 ب د، ج ع پر عمود نکالو۔

زاویه ب ع د = ۳۱ یا ۱۸۰ - ۳۱

$$\text{اب} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \Delta}{b \Delta} = \frac{a}{b} \quad \text{ج ۲۲}$$



اس لئے $\frac{اب}{ب ع} = ۳$ جم ۱۔ ۱ = ۳ - ۳ جم ۱۔ ۱

پس جب ۱۔ ۱ = $\frac{ب د}{ب ع} = \frac{ب د}{ب ع} \times \frac{اب}{ب ع} = ۳$ جم ۱۔ ۱ = ۳ جم ۱۔ ۱

اور جم ۱۔ ۱ = $\frac{د ع}{ب ع} = \frac{د ج}{ب ع} - \frac{ع ج}{ب ع} = \frac{د ج}{ب ع} - \frac{ب ج}{ب ع} - \frac{ج}{ب}$

= جم ۱۔ ۱ (۳ جم ۱۔ ۱) - ۲ جم ۱۔ ۱ = ۳ جم ۱۔ ۱ - ۲ جم ۱۔ ۱

(۱) اور (۳) کے ثبوت مسٹر ہارٹ نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چہارم میں دئے تھے۔

مثالیں

ضوابط ذیل کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

$$(۱) \text{ مس ۱۔ ۱} = \frac{۱ - \text{جم ۱۔ ۱}}{۱ + \text{جم ۱۔ ۱}}$$

$$(۲) \text{ مس ۱۔ ۱} = \text{مس ۱۔ ۱} = ۲ \text{ مس ۱۔ ۱}$$

$$(۳) \text{ جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱}$$

$$(۴) \text{ جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱}$$

$$(۵) \text{ مس ۱۔ ۱} = \text{مس ۱۔ ۱} = \frac{ن}{ن + م}$$

$$(۶) \text{ جم ۱۔ ۱} = \text{جم ۱۔ ۱} = \text{جم ۱۔ ۱} = ۱$$

$$\text{جہاں } ۱۔ ۱ = ۱۸۰$$

$$(۷) \text{ جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱} = \text{جب ۱۔ ۱}$$

$$\text{جہاں } ۱۔ ۱ = ۱۸۰$$

$$(۸) \text{ مم ۱۔ ۱} = \text{مم ۱۔ ۱} = \text{مم ۱۔ ۱}$$

(۹) جم ۶۰ - جب ۱۰ = $\frac{1}{4}$

چوتھے باب پر مثالیں

مثالیں ۱ تا ۱۵ ثابت کرو۔

(58)

۱- جم ۱۰ + جم ۲۰ = (۱۰ - ۱۰) = ۰

۲- (جم ۱۰ + جب ۱۰) + (جم ۱۰ - جب ۱۰) = ۲ - جم ۱۰

۳- جب ۳۰ جب ۱۰ + جم ۳۰ جم ۱۰ = جم ۲۰

۴- ۲ جم ۱۰ جب ۳۰ + ۴ جم ۱۰ جب ۳۰ = ۳ جب ۲۰

۵- جب ۱۰ + جب ۲۰ = (۱۰ - ۱۰) = ۰ - ۳ جب ۳۰

۶- $\frac{\text{جب ۱۰} + \text{جب ۲۰} + \text{جب ۳۰} + \text{جب ۴۰}}{\text{جم ۱۰} + \text{جم ۲۰} + \text{جم ۳۰} + \text{جم ۴۰}} = \text{مس ۱۰}$

۷- ۱۰ جم ۱۰ - جم ۵۰ = جم ۱۰ (۲ + ۱) جم ۲۰

۸- قم (م + ن) لاقم م لاقم ن لا - مم (م + ن) لاقم م لاقم ن لا

= مم م لا + مم ن لا - مم (م + ن) لا

۹- ۳ جم ۱۰ (جم ۳۰ ب - جم ۳۰ ج)

= ۴ جم ۱۰ (جم ۴۰ ج - جم ۴۰ ب) (جم ۴۰ ب - جم ۴۰ ج) + جم ۴۰ ج

۱۰- ۳ جب ۱۰ (جب ۳۰ ب + جب ۳۰ ج) جب (ب - ج)

= جب (ب - ج) جب (ج - ب) جب (ب - ج) جب (ب + ج)

۱۱- مس (۴۰ + ۱۰) مس (۴۰ - ۱۰) + مس (۴۰ + ۱۰) مس (۴۰ - ۱۰) + مس (۴۰ - ۱۰) مس (۴۰ + ۱۰)

۳ - =

۱۲- مم (۴۰ + ۱۰) مم (۴۰ - ۱۰) + مم (۴۰ + ۱۰) مم (۴۰ - ۱۰) + مم (۴۰ - ۱۰) مم (۴۰ + ۱۰)

۳ - =

- ۲۳- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = (\text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2)$
- ۲۴- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۲۵- $(\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2) - (\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2) = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۲۶- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \begin{vmatrix} \text{ج}^2 & \text{ج}^2 & \text{ج}^2 \\ \text{ج}^2 & \text{ج}^2 & \text{ج}^2 \\ \text{ج}^2 & \text{ج}^2 & \text{ج}^2 \end{vmatrix}$
- ۲۷- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 - \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۲۸- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۲۹- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۳۰- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۳۱- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$
- ۳۲- $\text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 = \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2 + \text{ج}^2 \text{ج}^2 \text{ج}^2$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جب ع جب ذ}}{\text{جم ذ} \pm \text{جم ع}}$$

۳۳- اگر $\text{لا} = \text{جم} + \text{جم} + \text{ب} = \text{لا} = \text{جم} + \text{ب} = \text{ب} - \text{جب} + \text{ب}$

ثابت کرد که $\pm \text{جب} (\text{ب} - \text{ب}) = \text{جم} + \text{ب} = \frac{1}{3}$

۳۴- ثابت کرد که

$$\frac{\text{جم} + \text{ط} + \text{جم} + \text{ذ}}{\text{جم} (\text{ط} - \text{ذ}) - 1} = \frac{(\text{جم} + \text{ط}) (\text{جم} + \text{ذ}) - (\text{جم} + \text{ط} + \text{جب} + \text{ذ}) (\text{جب} + \text{ط} + \text{ذ})}{\text{جم} (\text{ط} - \text{ذ}) - 1}$$

۳۵- اگر ط اور ذ مساوات

جب ط + جب ذ = لا (جم ذ - جم ط)

کو پورا کریں تو جب ط + جب ذ = لا

۳۶- ثابت کرد کہ مس ۵ = مس ۲ + ۲۰ مس ۲ + ۲۰ مس ۲ + ۲۰ مس ۱۰

$$۳۷- \text{اگر } \frac{\text{جم ع}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ع}}{\text{جب ب}} = 1 \text{ تو}$$

$$1 = \frac{\text{جم ع}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ع}}{\text{جب ب}}$$

۳۸- اگر $\text{جم} (\text{ب} + \text{ب}) = \text{جم} (\text{ج} + \text{د}) = \text{جم} (\text{ب} - \text{ب}) = \text{جم} (\text{ج} - \text{د})$

تو $\text{جم} \text{ لا} = \text{جم} \text{ ب} = \text{جم} \text{ ج} = \text{جم} \text{ د}$

۳۹- اگر $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} = \frac{1}{2} \text{ لا}$ تو

(جم ع + جب ع) (جم ب + جب ب) (جم ج + جب ج) = ۲ (جم ع جم ب جم ج)

+ جب ع جب ب جب ج

۴۰- اگر $\text{لا} = \text{ب} + \text{ج} = ۱۱$ ، اور $\text{جم} = \text{جم} + \text{ب} = \text{جم} + \text{ج}$

تو $\text{جم} \text{ ب} = \text{جم} \text{ ج} = \frac{1}{2}$

۴۱- اگر $\text{جم} \text{ ع} + \text{جب} \text{ ع} + \text{جم} \text{ ب} + \text{جب} \text{ ب} + \text{جم} \text{ ج} + \text{جب} \text{ ج}$

(80)

۵۸۔ اگر $۲ = ع + ب + ج$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مسا} \left(\frac{۲ \text{ جم ع جم ب جم ج}}{۱} \right) = \text{مسا} \left[\text{س (ع-ب) مس (ب-ع) مس (ج-ب) مس (ب-ج)} \right]$$

= مسا

۵۹۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مسا} \left[\frac{۱ (۱ + ب + ج)}{ب ج} \right] + \text{مسا} \left[\frac{ب (۱ + ب + ج)}{ج ۱} \right] + \text{مسا} \left[\frac{ج (۱ + ب + ج)}{ب ۱} \right] = ۲$$

۶۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

جبتا لا ± جبتا ما ± جبتا ی ± جبتا ع = ن ۲ (جہاں ن صحیح عدد ہے)
کا جبری مثال حسب ذیل ہے

$$\{ \text{س (س-ما) (س-ما) (س-ی) (س-ع) - (لا + ما + ی) (لا + ما + ع) (لا + ی + ع) (لا + ی + ع) } \\ \times \{ \text{س (س-لا) (س-لا) (س-ی) (س-ع) - (لا + ما + ی) (لا + ما + ع) (لا + ی + ع) (لا + ی + ع) } \\ = ۰ = \{ \text{ما ی - لا} \}$$

جہاں $۲ \text{ س} = لا + ما + ی + ع$

مثال ۶۱ تا ۷۵ کی مساواتیں حل کرو:-

- ۶۱۔ جب ط + ۲ جم ط = ۱
- ۶۲۔ جب ط = ۱۶ جب ط
- ۶۳۔ جب ط = جب ط = جب ط
- ۶۴۔ مس ط = ۸ جم ط - مم ط
- ۶۵۔ مس (۳ + ۱) = ۳ مس (۳ - ۱)
- ۶۶۔ ۲ جب (ط - ف) = جب (ط + ف) = ۱
- ۶۷۔ قط ط - قط ط = ۲ ط = ۲

(62)

$$۶۸ - \text{جب م ط} + \text{جب ن ط} + \text{جب (م + ن) ط} =$$

$$۶۹ - \text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } \frac{۱-ن}{۲} \text{ ط} = \text{جم ط}$$

$$۷۰ - \text{مس ط} + \text{قط ۲ ط} = ۱$$

$$۷۱ - ۲ (\text{جب ط} + \text{جم ط}) = ۱$$

$$۷۲ - \text{س ط} + \text{مس ۳ ط} + \text{مس ۵ ط} =$$

$$۷۳ - \text{تم لا} - \text{تم ۱ (لا + ۲)} = ۱۵$$

$$۷۴ - \text{اجب لا} + \text{ب جم ۱ ما} = \text{ع}$$

$$\text{و جم ۱ لا} - \text{ب جب ۱ ما} = \text{ب}$$

$$۷۵ - \text{قم م ع} - \text{قم م ط} = \text{مم م ع} - \text{مم م ط}$$

$$۷۶ - \text{تفاعلوں (۱) جب لا} + \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{(ب) جم ۲ لا}$$

کی ترتیبات کھینچو۔

$$۷۷ - \text{مسادات } (ا) (\text{جب ط} - \text{جم ع}) = \text{ب} (\text{جب ع} - \text{جم ط})$$

کے سب حل دریافت کرو۔

$$۷۸ - \text{اگر م صحیح عدد ہو اور } (ا + ب + ج) = ۱۱ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جب ۲ م} (ا + \text{جب ۲ م ب} + \text{جب ۲ م ج}) = (۱ - ا) \text{ 'م جب م ا جب م ب جب م ج'}$$

$$\text{جم ۲ م} (ا + \text{جم ۲ م ب} + \text{جم ۲ م ج}) = (۱ - ا) \text{ 'م جم م ا جم م ب جم م ج'}$$

$$۷۹ - \text{ثابت کرو کہ } لا + ۸ لای + ۸ ی = ۸ لا$$

$$\text{جہاں } لا = \text{جب (ا) جب ب} + \text{جب ج} ، ما = \text{جب ب جب ج} + \text{جب ج جب ا}$$

$$+ \text{جب ا جب ب} ، ی = \text{جب ا جب ب جب ج}$$

$$۸۰ - \text{اگر } \frac{۱ - \text{مس ب مس ج}}{\text{جم ۱}} + \frac{۱ - \text{مس ج مس ا}}{\text{جم ۲ ب}} = \frac{۱ - \text{مس ا مس ب}}{\text{جم ۳ ج}}$$

تو ثابت کرو کہ یا تو مس ل، مس ب، مس ج سلسلہ حسابیہ میں ہیں یا
ل + ب + ج، ۲۲ کا ایک صحیح عددی منفع ہے۔

۸۱۔ اگر جم ل = جم ط جب ف، جم ب = جم ف جب پ، جم ج = جم پ جب ط

اور ل + ب + ج = ۲۲ تو ثابت کرو کہ مس ط مس ذ مس پ = ۱

۸۲۔ ان مساواتوں کو حل کرو۔

$$۴ (جم ۳ ط + جم ۴ ط) (جم ۳ ط + جم ۴ ط) = ۱$$

$$۴ (جم ۳ ط + جم ۵ ط) (جم ۶ ط + جم ۷ ط) = ۱$$

پانچواں باب

تحت ضلعی زاویوں کے دائری تفاعل

ضوابط

۵۵۔ اگر ہم گذشتہ باب کے ضابطہ (۳۴) میں $\frac{1}{p}$ کی بجائے $\frac{1}{e}$ لکھیں تو

$$\text{جم} - \frac{1}{p} = \frac{1}{e} \quad \text{جب} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$$

اس لئے $\frac{1}{e} = \frac{1}{p} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$

مربع لینے سے $\frac{1}{e} = \frac{1}{p} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$
 حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$$

$$\text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$$

ان میں سے پہلے ضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کرو تو

$$\text{مس} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e} \quad \text{جم} = \frac{1}{e}$$

ان تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر e دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ ، مس $\frac{1}{2}ع$ میں سے ہر ایک کی ایک یکا قیمت ہے، اور اس لئے ان کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالا تین جملوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ ان سے جب $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ ، مس $\frac{1}{2}ع$ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم $\frac{1}{2}ع$ کی قیمت دی گئی ہو، نہ کہ جب $\frac{1}{2}ع$ دیا گیا ہو۔ اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۳۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن ۲ ع میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو $\frac{1}{2}ع$ کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو، اس لئے وہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ ، مس $\frac{1}{2}ع$ کو جم $\frac{1}{2}ع$ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے نہ صرف خود جب $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ ، مس $\frac{1}{2}ع$ کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطے $\frac{1}{2} (۲ ن ۲ ع)$ میں شریک تمام زاویوں کے ان تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(64) جب $\frac{1}{2} (۲ ن ۲ ع)$ کی جو قیمتیں ہو سکتی ہیں ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہئے، ایک وہ صورت جبکہ ن جنت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

$$\text{جب } \frac{1}{2} (۲ م ۲ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{2} ع) = \pm \text{جب } \frac{1}{2} ع$$

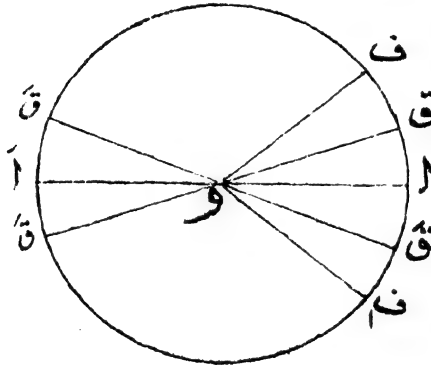
لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

$$\text{جب } \frac{1}{2} (۲ م ۲ ع + ۲ ن ۲ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{2} ع) = \pm \text{جب } \frac{1}{2} ع$$

پس جب $\frac{1}{2} ع$ اور - جب $\frac{1}{2} ع$ کی قیمتیں اُس ضابطے سے حاصل ہوتی ہیں جو جب $\frac{1}{2} ع$ کو جم $\frac{1}{2} ع$ کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{1}{2}$ (۲ ن ۱۲ ± ع) اور $\frac{1}{2}$ (۲ ن ۱۲ ± ع) کی قیمتیں ± جم $\frac{1}{2}$ ع، ± مس $\frac{1}{2}$ ع ہیں، اور اس طرح اُن ضابطوں سے جو جم $\frac{1}{2}$ ع اور مس $\frac{1}{2}$ ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم $\frac{1}{2}$ ع - جم $\frac{1}{2}$ ع اور مس $\frac{1}{2}$ ع - مس $\frac{1}{2}$ ع کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس مذکورہ صدر تین ضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶۔ محصلہ بالا تین ضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی ہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔



اگر اوف = ع اور اوف = ع تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جٹ (وا، وف)، (وا، وف) ہی وہ جٹ ہیں جن میں سے ہر زاوے کی جیب اتمام وہی ہے جو ع کی ہے، اگر زاویوں اوف، اوف کے ناصف علی الترتیب ق وق، ق وق ہوں تو زاویوں (وا، وف) کا ناصف وقی یا وق ہے، اس لئے جب $\frac{1}{2}$ ع، جم $\frac{1}{2}$ ع، مس $\frac{1}{2}$ ع کے ضابطوں سے جبکہ جم ع دیا گیا ہو ان تمام ہم اختتامی

زاویوں کی جیب، جیب التمام ماس حاصل ہوتے ہیں جو چار جٹوں (واؤق) (واؤق) (واؤق) (واؤق) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کی جیب، جب $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیب، - جب $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہیں؛ پہلے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیب التمام، جم $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جٹوں کی جیب التمام، - جم $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہیں؛ پہلے اور دوسرے جٹوں کے ماس، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کے ماس، - مس $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی۔

(65)

۵۷۔ اب ہم دفعہ ۵۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات دور کرینگے۔ تفاعل جب $\frac{1}{2}$ عہ مثبت یا منفی ہے بوجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ عہ، 2π اور $(1 + 2\pi)$ کے درمیان یا $(1 + 2\pi)$ اور $(2 + 2\pi)$ کے درمیان واقع ہو، یعنی بوجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ عہ، 2π اور $1 + 2\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ اس لئے ہمیں ضابطہ

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ عہ} = (1 - \frac{1}{2}) \text{ جم عہ} \dots \dots (1)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ف ایسا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{2}$ عہ سے عین چھوٹا ہے۔

تفاعل جم $\frac{1}{2}$ عہ مثبت یا منفی ہے بوجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ عہ، $2\pi - 2\pi$ اور $2\pi + 2\pi$ کے درمیان یا $2\pi + 2\pi$ اور $2\pi + 2\pi$

اور 2 ن 2 + 2 + 2 کے درمیان واقع ہو اپنی بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2} (2 + 2) = 2$ اور 2 ن 2 + 2 + 2 یا 2 ن 2 + 2 کے درمیان واقع ہو؛ اسلئے

$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ع} = (1) \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \text{جم ع})} \dots \dots (2)$$

جس میں ق وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{1}{2} (2 + 2) = 2$ سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔
اسی طرح

$$\text{مس } \frac{1}{2} \text{ ع} = (1 - \text{ق}) \sqrt{\frac{1 - \text{جم ع}}{1 + \text{جم ع}}} \dots \dots (3)$$

جس میں عدد ف - ق ہمیشہ یا تو صفر ہے یا ± 1 ۔

۵۸۔ اگر جم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۵) میں ا کی بجائے $\frac{1}{2} \text{ ع}$ لکھیں تو

$$\begin{aligned} \text{جب ع} = 2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ع} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ع} \\ \text{مس } \frac{1}{2} \text{ ع} = \frac{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ ع}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ع}} = \frac{\text{جب ع}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ع}} = \frac{2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ع}}{\text{جب ع}} \end{aligned}$$

اس طرح ہیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں:-

$$\text{مس } \frac{1}{2} \text{ ع} = \frac{\text{جب ع}}{1 + \text{جم ع}} = \frac{1 - \text{جم ع}}{\text{جب ع}} \dots \dots (4)$$

جن سے مس $\frac{1}{2} \text{ ع}$ بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ ان ضابطوں سے مس $\frac{1}{2} \text{ ع}$ حاصل ہوگا جبکہ جب ع اور جم ع دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ 2 ن 2 + 2 ع میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام وہی ہیں جو ع کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس $\frac{1}{2} \text{ ع}$ کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جب ع اور جم ع کی قوم میں بیان ہوئے ہیں زاویوں 2 ن 2 + $\frac{1}{2} \text{ ع}$ میں سے سب زاویوں کے ماس حاصل ہوتے ہیں؛ اور

(66)

یہ تمام زاوے ایک ہی ماس مس $\frac{1}{p}$ عد رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹۔ اب ہم جب عد کی رقوم میں جب $\frac{1}{p}$ عد، جم $\frac{1}{p}$ عد، مس $\frac{1}{p}$ عد کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$+ \text{ جب عد} = +1 = 2 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد} = (\text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد})$$

$$\text{نیز } - \text{ جب عد} = -1 = 2 - \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد} = (\text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد})$$

$$\text{اس لئے } \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد} = \pm \sqrt{+1 \text{ جب عد}}$$

$$\text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد جم } \frac{1}{p} \text{ عد} = \pm \sqrt{-1 \text{ جب عد}}$$

$$\text{اس لئے } \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ عد} = \frac{1}{p} \left\{ \pm \sqrt{+1 \text{ جب عد}} \pm \sqrt{-1 \text{ جب عد}} \right\}$$

$$\text{ جم } \frac{1}{p} \text{ عد} = \frac{1}{p} \left\{ \pm \sqrt{+1 \text{ جب عد}} \mp \sqrt{-1 \text{ جب عد}} \right\}$$

مجمہم علامتوں میں سے ہر علامت لیجا سکتی ہے؛ اس لئے جب عد کی رقوم میں جب $\frac{1}{p}$ عد کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب $\frac{1}{p}$ عد اور جم $\frac{1}{p}$ عد کو جب عد کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب ان تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابطے $\frac{1}{p} (ن + 1) (ن - 1)$ میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۳۳) میں بتا دیا ہے ان زاویوں کی جیوب جو $\frac{1}{p} (ن + 1) (ن - 1)$ میں شامل ہیں جب عد کے مساوی ہیں۔ زاویوں $\frac{1}{p} (ن + 1) (ن - 1)$ کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہمیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

$$(۱) \text{ اگر } ن = ۴ \text{ م تو}$$

$$\frac{1}{p} (ن + 1) (ن - 1) = ۲۲ م + \frac{1}{p} \text{ عد}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جب $\frac{1}{p}$ عم اور جم $\frac{1}{p}$ عم ہے
(۲) اگر $n = m + 1$ تو

$$\frac{1}{p} (n) = (1 - \text{عم}) = 2m + \pi \frac{1}{p} - \pi \frac{1}{p} - \frac{1}{p}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جم $\frac{1}{p}$ عم اور جب $\frac{1}{p}$ عم ہے۔
(۳) اگر $n = m + 2$ تو

$$\frac{1}{p} (n) = (1 - \text{عم}) = 2m + \pi + \pi \frac{1}{p} - \frac{1}{p}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - جب $\frac{1}{p}$ عم اور جم $\frac{1}{p}$ عم ہے
(۴) اگر $n = m + 3$ تو

$$\frac{1}{p} (n) = (1 - \text{عم}) = (2m + 1) + \pi \frac{1}{p} - \pi \frac{1}{p} - \frac{1}{p}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - جم $\frac{1}{p}$ عم اور - جب $\frac{1}{p}$ عم
کے مساوی ہے۔

اس طرح جب $\frac{1}{p}$ عم کے ضابطے سے چار قیمتیں جب $\frac{1}{p}$ عم جم $\frac{1}{p}$ عم،
- جب $\frac{1}{p}$ عم، - جم $\frac{1}{p}$ عم حاصل ہوتی ہیں اور جم $\frac{1}{p}$ عم کے ضابطے سے چار قیمتیں
جم $\frac{1}{p}$ عم، جب $\frac{1}{p}$ عم، - جم $\frac{1}{p}$ عم، - جب $\frac{1}{p}$ عم -

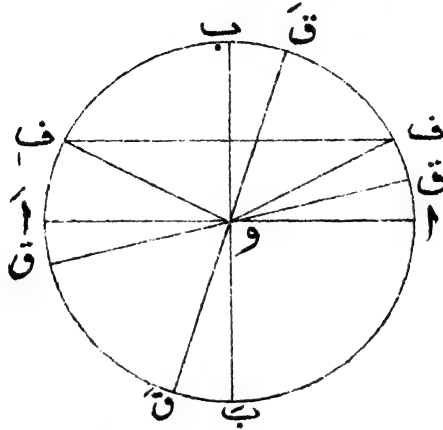
لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جٹ جو مساواتوں

$$\left\{ \begin{array}{l} (لا + ما)^2 = 1 + جب عم \\ (لا - ما)^2 = 1 - جب عم \end{array} \right\}$$

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = جب \frac{1}{p} عم \\ ما = جم \frac{1}{p} عم \end{array} \right\} ، لا = جم \frac{1}{p} عم ، لا = جب \frac{1}{p} عم ، لا = جم \frac{1}{p} عم$$

۶۰۔ گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے ابہامات کی ہندسی توضیح
حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ $وا = عد$ ، $ف = وا = ۲۰$ ۔ تو وہ



زاوئے جن کی جیب وہی ہے جو عد کی ہے ہم اختتامی زاویوں ($وا$ ، $وف$)،
($وا$ ، $وف$) کے دو جٹ ہیں، پس اگر زاویوں $ا$ ، $د$ ، $ا$ ، $د$ کے
ناصف $ق$ ، $وق$ ، $ق$ ، $وق$ ہوں تو ہم اختتامی زاویوں ($وا$ ، $وق$)،
($وا$ ، $وق$)، ($وا$ ، $وق$)، ($وا$ ، $وق$) کے چار جٹ وہ زاوئے ہونگے
جن کی جیب اور جیب التمام ان ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب $پ$ عد
جم $پ$ عد کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب عد دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $ق$ و $ب$
 $= پ$ عد اور $ق$ و $ا = پ$ عد (۲۰ ۔ $عد$)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان
چار جٹوں کی جیب جب $پ$ عد، جب $پ$ عد، جب $پ$ عد، جب $پ$ عد ہیں
اور ان کی جیب التمام جم $پ$ عد، جم $پ$ عد، جب $پ$ عد، جب $پ$ عد
ہیں۔ جب $پ$ عد، جم $پ$ عد کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو
ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{17} \left(\frac{1}{p} \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ ع} \right) \\ \overline{17} = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ ع} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \right)$$

(68) اور اسی طرح

جب $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{17}$ جب $\left(\frac{1}{p} \text{ ع} - \frac{1}{p} \right)$

اس لئے جب $\frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$ مثبت ہے یا منفی ہو جب اس کے کہ $\frac{1}{p}$ ع

$\frac{1}{p} + 2$ اور 2 ن اور 1 کے درمیان واقع ہے یا 2 ن اور 1 کے درمیان۔

اور جب $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$ مثبت ہے یا منفی ہو جب اس کے کہ $\frac{1}{p}$ ع

$\frac{1}{p} - 2$ اور 2 ن اور 1 کے درمیان واقع ہے یا 2 ن اور 1 کے درمیان۔

اس لئے

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \text{ جب ع} ،$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \text{ جب ع} ،$$

جہاں f مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{p} + \frac{1}{p}$ سے

عین چھوٹا ہے اور q وہ صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{p} - \frac{1}{p}$ سے

عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left\{ \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \text{ جب ع} + \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \text{ جب ع} \right\} (5)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left\{ \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \text{ جب ع} - \overline{(1-f)} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \text{ جب ع} \right\} (6)$$

$$\text{مس } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{(1-) \sqrt{1+ \text{جب ع}} + (1-) \sqrt{1- \text{جب ع}}}{(1-) \sqrt{1+ \text{جب ع}} - (1-) \sqrt{1- \text{جب ع}}} \quad (۷)$$

۶۲۔ جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کو مس ع کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} (- \text{جم ع})$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \text{مس ع}}} - 1 \right) \frac{1}{p} =$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \text{مس ع}}} \right)$$

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \sqrt{1+ \frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \text{مس ع}}}} - 1$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \sqrt{1+ \frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \text{مس ع}}}} + 1$$

$$\text{اور اس لئے مس } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \frac{1}{\frac{1}{p} \sqrt{1+ \text{مس ع}}}}} - 1$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ابہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہو سکتی ہے۔

یہ تو جہ طلب ہے کہ مس $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں، مس $\frac{1}{p}$ ع کی دو درجی مساوات

$$\text{مس ع} = \frac{\text{مس } \frac{1}{p} \text{ ع}}{1 - \frac{\text{مس } \frac{1}{p} \text{ ع}}{p}}$$

کی اصلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۱) میں ۱ کی بجائے $\frac{1}{p}$ ع رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

۶۳۔ تفاعل جب $\frac{1}{p}$ جم $\frac{1}{p}$ مس $\frac{1}{p}$ بغیر ابہام کے مس $\frac{1}{p}$ کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں، کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا $\frac{1}{p}$ دہی ہے جو $\frac{1}{p}$ کا ہے ضابطہ $n + \frac{1}{p}$ مس $\frac{1}{p}$ شامل ہیں، اور $2(n + \frac{1}{p} + \frac{1}{p})$ یا $2n + \frac{2}{p}$ مس $\frac{1}{p}$ دہ زاویے ہیں جن کے تمام دائری تفاعل دہی ہیں جو $\frac{1}{p}$ کے ہیں۔ پس

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \frac{2 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}}{2 \text{ مس } \frac{1}{p} + 1 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p} + 1 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}}$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} = \frac{2 \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} - 1 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}}{2 \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} + 1 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} - 1 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p}}$$

$$\text{اس لئے نیز } \text{مس } \frac{1}{p} = \frac{2 \text{ مس } \frac{1}{p} - 1 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p}}{2 \text{ مس } \frac{1}{p} - 1 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p}}$$

مثالیں

- (۱)۔ اگر $2 \text{ جم } \frac{1}{p} = 1 \text{ جب } \frac{1}{p} - 1 \text{ جب } \frac{1}{p} + 1 \text{ جب } \frac{1}{p}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{p}$ کو
 $\frac{1}{p} (5 + n)$ اور $\frac{1}{p} (4 + n)$
 کے درمیان واقع ہونا چاہئے جن میں n ایک صحیح عدد ہے۔
 (۲)۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{p} = \frac{1 \text{ جب } \frac{1}{p}}{1 \text{ جب } \frac{1}{p} - 1 \text{ جب } \frac{1}{p}} + \frac{1 \text{ جم } \frac{1}{p}}{1 \text{ جب } \frac{1}{p} + 1 \text{ جب } \frac{1}{p}}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ

$$2(n - \frac{1}{p}) \text{ اور } 2(n + \frac{1}{p})$$

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

(۳)۔ ثابت کرو کہ $\frac{1 - \sqrt{1 + 1}}{1 + \sqrt{1 + 1}}$ کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:

(۴)۔ اگر جب $\frac{1}{2} = 1$ تو ثابت کرو کہ مس ۱ کی چار قیمتیں جملہ

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 + 1) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - 1) \right\}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۵)۔ ضابطہ مس $\frac{1}{2} = 1$ میں ثابت کرو کہ مثبتہ علامت

کی بجائے (۱) رکھنے سے ابہام دور کیا جاسکتا ہے جہاں م، $\frac{9}{180} + 1$ سے

عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

دئے ہوئے زاوئے کے ایک ثلث کے دائری تفاعل

(70)

۴۴۔ اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے $\frac{1}{2}$ درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

جب $\frac{1}{2} = 3$ جب $\frac{1}{2} = 2$ جب $\frac{1}{2} = 1$ ، ، ، ، (۸)

جب $\frac{1}{2} = 4$ جب $\frac{1}{2} = 3$ جب $\frac{1}{2} = 2$ ، ، ، ، (۹)

مس $\frac{1}{2} = 3$ مس $\frac{1}{2} = 2$ مس $\frac{1}{2} = 1$ ، ، ، ، (۱۰)

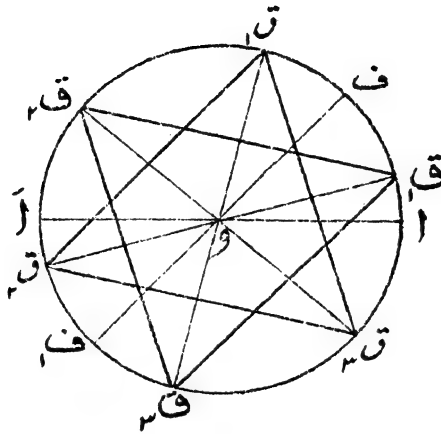
۱۔ مس $\frac{1}{2} = 3$ مس $\frac{1}{2} = 2$ مس $\frac{1}{2} = 1$ ،

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کبھی مساوات ملتی ہے جس سے $\frac{1}{2}$ کے دائری تفاعلوں کو $\frac{1}{2}$ کے دائری تفاعلوں کی رفہوم میں معلوم

ق ق م عمود ہیں واپر۔ زاویوں (وا، وق) (وا، وق) کے دو جٹوں کی جیوب التمام جم $\frac{1}{2}$ عہ ہیں، دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں، اور دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔ اس لئے جم $\frac{1}{2}$ عہ میں جو کبھی مساوات (۹) ہے اس کی تین اصلیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، جم $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ عہ اور جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاوے جن کا ماس دہی ہے جو عہ کا ہے (وا، وف) اور (وا، وف) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱ میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق، وق، وق ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے وق، وق، وق ہیں جہاں ق ق ق ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق وا = $\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ق، وق، ق، وق، اور ق، وق، وق دائرے کے قطر ہیں۔ جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $\frac{1}{2}$ عہ ہیں؛ (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں، اور (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔ اس لئے مس $\frac{1}{2}$ عہ کی کبھی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس $\frac{1}{2}$ عہ، مس $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ عہ، مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔

اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں:۔ لایں کبھی مساوات ۳ لا۔ ۳ لا = جب عہ کی اصلیں حسب ذیل ہیں:



جب $\frac{1}{10}$ ع، جب $\frac{1}{10}$ (ع - ۲) = جب $\frac{1}{10}$ (ع + ۲) ؛
کبھی مساوات

$$۲ لا - ۳ لا = جم ع$$

کی اصلیں ہیں
جم $\frac{1}{10}$ ع، - جم $\frac{1}{10}$ (ع - ۲) = جم $\frac{1}{10}$ (ع + ۲)
اور کبھی مساوات

$$مس ع (۱ - ۳ لا) = ۳ لا - لا$$

کی اصلیں ہیں
مس $\frac{1}{10}$ ع، - مس $\frac{1}{10}$ (ع - ۲) = مس $\frac{1}{10}$ (ع + ۲)

بعض زاویوں کے دائری تفاعل کی تعیین

۶۵۔ اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعل کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جاسکتے ہیں جو ان زاویوں کے کسری یا تحت ضعفی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں۔

$$(۱) چونکہ جب $\frac{1}{10}$ ع = جم $\frac{1}{10}$ ع = $\frac{1}{۶۷}$$$

اس لئے دفعہ ۵ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{جب } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{14} \text{، جم } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{14} \text{، } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{14} \text{، } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{14}$$

اور اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم جب $\frac{1}{4} = \pi \frac{1}{16}$ اور جم $\frac{1}{4} = \pi \frac{1}{16}$ کو محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۲) \text{ چونکہ جب } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{4} \text{، جم } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{4} \text{، } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{4}$$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} \text{، جم } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} \text{، } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} \text{، } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14}$$

یہ قیمتیں جب ۱۵، جم ۱۵ کے لئے دفعہ ۳۴ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس عمل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زاویوں کی جیب اور جیب اتمام محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۳) \text{ — چونکہ جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$$

(78)

$$\text{اور جب } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، جم } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5}$$

اس لئے جب $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ، جم $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ، جب $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ، جم $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ، جب $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ، جم $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$ ،

$$\text{اب چونکہ جب } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، جم } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5}$$

$$\text{اس لئے جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$$

$$\text{یا جب } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$$

$$\text{یعنی جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5}$$

$$۲۱ = ۳۶ - ۱۵ = ۲۱، ۲۱ = ۲۵ - ۴ = ۲۱، ۲۱ = ۳۰ - ۹ = ۲۱$$

$$۲۳ = ۲۵ - ۲ = ۲۳، ۲۳ = ۲۹ - ۶ = ۲۳، ۲۳ = ۳۲ - ۹ = ۲۳$$

اس لیے ہم زاویوں ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۳ کی جیب التام محسوب کر سکتے

ہیں۔ اس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ ۲۵ سے بڑے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التام اس کے متمم کی جیب التام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے اور یہ متمم زاویہ ۲۵ سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

جیب

(74)

$\frac{1}{14} \{ \overline{5} + \overline{5} (1 - \overline{3})^2 - (1 - \overline{5}) (\overline{2} + \overline{7}) \}$	$\pi \frac{1}{4} = ۲۱$
$\frac{1}{8} (1 - \overline{5} - \overline{5} \overline{2} - \overline{3} \overline{7})$	$\pi \frac{1}{3} = ۹$
$\frac{1}{8} (\overline{5} - \overline{5} \overline{2} - \overline{2} + \overline{1})$	$\pi \frac{1}{2} = ۹$
$\frac{1}{8} (\overline{3} + \overline{1} \overline{5} - \overline{5} \overline{2} + \overline{1})$	$\pi \frac{1}{5} = ۱۲$
$\frac{1}{9} (\overline{2} - \overline{7})$	$\pi \frac{1}{12} = ۱۵$
$\frac{1}{9} (1 - \overline{5})$	$\pi \frac{1}{10} = ۱۸$
$\frac{1}{14} \{ (1 + \overline{5}) (\overline{2} - \overline{7}) - \overline{5} - \overline{5} (1 + \overline{3})^2 \}$	$\pi \frac{6}{5} = ۲۱$
$\frac{1}{8} (\overline{5} \overline{2} - \overline{1} - \overline{3} + \overline{1} \overline{5})$	$\pi \frac{1}{15} = ۲۴$
$\frac{1}{8} (\overline{2} + \overline{7} - \overline{5} + \overline{5} \overline{2})$	$\pi \frac{3}{5} = ۲۴$
$\frac{1}{2}$	$\pi \frac{1}{4} = ۳۰$
$\frac{1}{14} \{ \overline{5} + \overline{5} (1 - \overline{3})^2 + (1 - \overline{5}) (\overline{2} + \overline{7}) \}$	$\pi \frac{11}{5} = ۲۳$

$\overline{a}^2 - 10\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$	$\pi \frac{1}{5} = 36^\circ$
$\left\{ \overline{a} - \overline{a} (1 - \sqrt{a})^2 - (1 + \overline{a}) (\sqrt{a} + \overline{a}) \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{13}{4} = 39^\circ$
$(1 + \overline{a} - \overline{a} 4 + 30\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{3} = 42^\circ$
$\sqrt{a} \cdot \frac{1}{4}$	$\pi \frac{1}{2} = 45^\circ$
$(\sqrt{a} - \overline{a} + \overline{a} 2 + 10\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{9}{15} = 48^\circ$
$(1 + \overline{a}) (\sqrt{a} - \overline{a}) + \overline{a} - \overline{a} (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{14}$	$\pi \frac{6}{4} = 51^\circ$
$(1 + \overline{a}) \cdot \frac{1}{2}$	$\pi \frac{2}{3} = 54^\circ$
$(1 - \overline{a}) (\sqrt{a} - \overline{a}) - \overline{a} + \overline{a} (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{14}$	$\pi \frac{19}{9} = 56^\circ$
$\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}$	$\pi \frac{1}{2} = 60^\circ$
$(\sqrt{a} - 10\sqrt{a} + \overline{a} + \overline{a} 2) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{2} = 63^\circ$
$(1 + \overline{a} + \overline{a} 4 - 30\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{11}{3} = 64^\circ$
$\left\{ \overline{a} - \overline{a} (1 - \sqrt{a})^2 + (1 + \overline{a}) (\sqrt{a} + \overline{a}) \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{13}{4} = 69^\circ$
$\overline{a}^2 + 10\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$	$\pi \frac{2}{5} = 72^\circ$
$(\sqrt{a} + \overline{a}) \cdot \frac{1}{2}$	$\pi \frac{5}{12} = 75^\circ$
$(1 - \overline{a} + \overline{a} 4 + 30\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{13}{3} = 78^\circ$
$(\overline{a} - \overline{a} 2 + \sqrt{a} + 10\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{19}{4} = 81^\circ$
$(\sqrt{a} + \overline{a}^2 - 10\sqrt{a} + \overline{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{15} = 84^\circ$
$\left\{ (1 - \overline{a}) (\sqrt{a} - \overline{a}) + \overline{a} + \overline{a} (1 + \sqrt{a})^2 \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{19}{4} = 86^\circ$
1	$\pi \frac{1}{2} = 90^\circ$

(75)

اس جدول میں زاویوں 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10 کی بیوب دی گئی ہیں؛

اور تمام زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں۔ اوپر کے جملوں میں جو اعداد مجدد ہیں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات تک مسطر بنی۔ گرے نے (میں) بنجرف میتیماکس جلد ششم) میں دی ہیں۔ ہٹن کی جدولوں میں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک دی گئی ہیں۔ مکمل جدول جس میں ان زاویوں کے محاسن قاطع، قاطع التمام منطق نسب ناوالی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن (Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں لے گی۔

پانچویں باب پر مثالیں

مثلاً اناہ کے رشتے ثابت کرو جن میں $ا + ب + ج = ۱۸۰$

$$(۱) \quad \frac{مس \frac{۱}{۲} = ۱ - جم + ۱ + جم + ب + جم + ج}{س \frac{۱}{۲} ج = ۱ - جم + ج + ۱ + جم + ب}$$

$$(۲) \quad جب (ا - ب) جب (ا - ج) + جب (ب - ج) جب (ب - ا) + جب (ج - ا)$$

$$\times (ج - ب) = ۲ جم \frac{۱}{۲} (ب - ج) جم \frac{۱}{۲} (ج - ا) \times جم \frac{۱}{۲} (ا - ب) (ب - ا) - ۲ جب \frac{۳}{۲} ا جب \frac{۳}{۲} ب جب \frac{۳}{۲} ج$$

$$(۳) \quad جم \frac{۴}{۲} ا + جم \frac{۴}{۲} ب + جم \frac{۴}{۲} ج + ۲ جم ا جم \frac{۲}{۲} ب جم \frac{۲}{۲} ج + ۲ جم ب جم \frac{۲}{۲} ج جم \frac{۲}{۲} ا + ۲ جم ج جم \frac{۲}{۲} ا جم \frac{۲}{۲} ب = ۸ جم \frac{۴}{۲} ا + جم \frac{۴}{۲} ب جم \frac{۴}{۲} ج$$

$$(۴) \quad ح جب ا = ۳ جم \frac{۱}{۲} ا جم \frac{۱}{۲} ب جم \frac{۱}{۲} ج + جم \frac{۱}{۲} ا جم \frac{۱}{۲} ب جم \frac{۱}{۲} ج$$

$$(۵) \quad ح ق م ا (ا + ح م ب م ج)$$

$$= ق م ا ق م ب ق م ج \{ ۴ جم \frac{۱}{۲} (ب - ج) جم \frac{۱}{۲} (ج - ا) جم \frac{۱}{۲} (ا - ب) - ا \}$$

(۶) $\text{ح} \text{ ق م } ۱ - (\text{م ب م ج})$

$$= \frac{1}{4} \text{ ق ط } \frac{1}{4} \text{ ا ق ط } \frac{1}{4} \text{ ب ق ط } \frac{1}{4} \text{ ج} + \text{ق م } ۱ \text{ ق م ب ق م ج}$$

(۷) $\text{ح} \text{ ج ب } ۱ \text{ ج ب } (\text{ب} - \text{ج})$

$$= \text{ج م } ۱ \frac{1}{4} \text{ ج م } \frac{1}{4} \text{ ب ج م } \frac{1}{4} \text{ ج ب ج } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ج}) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ج} - ۱) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا ب})$$

$$(۸) \quad \frac{\text{ج م } \frac{1}{4} - \text{ج ب } \frac{1}{4} \text{ ب} + \text{ج ب } \frac{1}{4} \text{ ج}}{\text{ج م } \frac{1}{4} \text{ ب} + \text{ج ب } \frac{1}{4} \text{ ج} - \text{ج ب } \frac{1}{4} \text{ ا}} = \frac{\text{ا م } \frac{1}{4} \text{ م} + \text{ا م } \frac{1}{4} \text{ ب}}{\text{ا م } \frac{1}{4} \text{ ب}}$$

(۹) ثابِت کِرو متماثلہ

$$(۱۰) \quad \frac{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ج})} + \frac{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ج} - ۱)}{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ج})} + \frac{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ب})} = \frac{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ج}) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ج} - ۱) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ج ب } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ج}) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ج}) \text{ ج ب } \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ب})} = \text{اگر } ۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۶۰ \text{ اور اگر}$$

$$\text{ج م } ۱ = \frac{(\text{د} - ۱) (\text{ب} - \text{ج})}{(\text{د} + ۱) (\text{ب} + \text{ج})} \text{ ج م } \text{ب} = \frac{(\text{د ب} - \text{ج د})}{(\text{د ب} + \text{ج د})} \text{ ج م } \text{ج} = \frac{(\text{د ج} - ۱) (\text{ب} - ۱)}{(\text{د ج} + ۱) (\text{ب} + ۱)}$$

تو

$$(۱۱) \quad \text{مس } \frac{1}{4} \text{ ا} + \text{مس } \frac{1}{4} \text{ ب} + \text{مس } \frac{1}{4} \text{ ج} = ۱ \pm$$

ثابِت کِرو کہ

$$\frac{\text{ق م } ۲ \text{ لا ق م } ۱ - \text{ق م } ۲ \text{ ا ق م } ۱}{\text{ق م } ۲ \text{ لا ق م } ۱ + \text{ق م } ۲ \text{ ا ق م } ۱} = \frac{\text{مس } \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{مس } \frac{1}{4} (\text{ا} - \text{ب})}$$

(76)

(۱۲) اگر $\text{م م } \frac{1}{4} \text{ ح} + \text{م م } \frac{1}{4} \text{ ح} = ۲$ م م ط تو ثابِت کِرو کہ

$$\{ ۲ - ۱ \text{ ق ط } \text{ح م} (\text{ع} - \text{ط}) + \text{ق ط } \text{ا ط} \} \{ ۲ - ۱ \text{ ق ط } \text{ط ح م} (\text{ب} - \text{ط}) + \text{ق ط } \text{ط ح} \} = \text{مس } \text{ط}$$

(۱۳) اگر $۱ + ب + ج + د = ۳۶۰$ تو ثابت کرو کہ

$$جم \frac{۱}{۴} + د جب \frac{۱}{۴} + ب جب \frac{۱}{۴} + ج - جم \frac{۱}{۴} + ب جب \frac{۱}{۴} + ج جب \frac{۱}{۴} + ب جب \frac{۱}{۴} + د$$

$$= جب \frac{۱}{۴} + (۱ + ب) جب \frac{۱}{۴} + (۱ + ج) جم \frac{۱}{۴} + (۱ + د)$$

(۱۴) ثابت کرو کہ

$$جب \frac{۱}{۴} + (ب + ج) + جب \frac{۱}{۴} + (ج - ۱) + جب \frac{۱}{۴} + (۱ - ب)$$

$$+ ۲ جم \frac{۱}{۴} + (ب - ج) جم \frac{۱}{۴} + (ج - ۱) جم \frac{۱}{۴} + (۱ - ب) = ۲$$

(۱۵) ثابت کرو کہ

$$جب (۱ - ی) + جب (ی - لا) + جب (لا - ۱)$$

$$+ جم (۱ - ی) + جم (ی - لا) + جم (لا - ۱)$$

$$= مس \frac{۱}{۴} + (۱ - ی) مس \frac{۱}{۴} + (ی - لا) مس \frac{۱}{۴} + (لا - ۱)$$

(۱۶) دریافت کرو کہ ع، ہ، جہ میں کیا رشتہ ہونا چاہیئے کہ

$$جم ع + جم ہ + جم جہ = ۱ + ۲ جب \frac{۱}{۴} + ع جب \frac{۱}{۴} + ہ جب \frac{۱}{۴} + جہ$$

(۱۷) اگر $۱ + ب + ج + د = ۳۶۰$ تو ثابت کرو کہ

$$جم (ب + ج + د) + جم (ج + د + ۱) + جم (د + ۱ + ب) + جم (۱ + ب + ج)$$

$$= ۴ جم \frac{۱}{۴} + (ب + ج) جم \frac{۱}{۴} + (ج + د) جم \frac{۱}{۴} + (د + ۱) جم \frac{۱}{۴}$$

$$(۱۸) اگر مس \frac{۱}{۴} ط = مس \frac{۱}{۴} فہ اور مس فہ = ۲ مس ع$$

$$تو ثابت کرو کہ ط + فہ = ۲ ع$$

$$جب س جب (س - ط) جب (س - فہ) جب (س - پ)$$

$$(۱۹) اگر جب س = ۴ جم \frac{۱}{۴} ط + ۴ جم \frac{۱}{۴} فہ + ۴ جم \frac{۱}{۴} پ$$

تو ثابت کرو کہ

$$مس \frac{۱}{۴} س = مس \frac{۱}{۴} س (س - ط) مس \frac{۱}{۴} س (س - فہ) مس \frac{۱}{۴} س (س - پ)$$

جہاں ۲ س = ط + ف + پ
(۲۰) اگر ۱ + ب + ج + د = ۸۰ تو ثابت کرو کہ
جب ۱ + جب ب + جب ج - جب د

= ۲ جم ۱ + ۱ (د + ۱) جم ۱ + (ب + ۱) جم ۱ + (ج + ۱) جم ۱
(۲۱) اگر ع + ہ + ج = ۲۲ تو ثابت کرو کہ

جب ہ (۱ + ۲ جم ج) + جب ج (۱ + ۲ جم ع) + جب ع (۱ + ۲ جم ہ)
= ۲ جب ۱ + (ج - ہ) جب ۱ + (ع - ج) جب ۱ + (ہ - ع) جب ۱
(۲۲) اگر ۲ س = ۱ + ب + ج تو ثابت کرو کہ

جم ۱ + س جم ۱ + (س - ۱) جم ۱ + (س - ب) جم ۱ + (س - ج) جم ۱
+ جب ۱ + س جب ۱ + (س - ۱) جب ۱ + (س - ب) جب ۱ + (س - ج) جم ۱
= جم ۱ + ۱ جم ۱ + ب جم ۱ + ج جم ۱
(۲۳) اگر ع + ہ + ج = ۲۲ تو

(۱ + ۱ مس ۱) (ع - ۱) (۱ + ۱ مس ۱) (ب - ۱) (۱ + ۱ مس ۱) (ج - ۱)
= (۱ + ۱ مس ۱) (ع - ۱) (۱ + ۱ مس ۱) (ب - ۱) (۱ + ۱ مس ۱) (ج - ۱)
(۲۴) اگر ع + ہ + ج = ۲۲ تو ثابت کرو کہ

جم ۱ + ۳ (ج - ۲) جم ۱ + ۳ (ع - ۲) جم ۱ + ۳ (ہ - ۲) جم ۱
= ۲ جم ۱ + ۳ (ج - ۲) جم ۱ + ۳ (ع - ۲) جم ۱ + ۳ (ہ - ۲) جم ۱
(۲۵) اگر جم ۲ ط = جم ۲ ع = جم ۲ ط = جم ۲ ع
اور مس ط پس ط = مس ع پس ع

تو ثابت کرو کہ مس ۱ + ع مس ۱ + ع = مس ۱ + ہ

(77)

(۲۶) اگر حجم $\epsilon =$ حجم بہ حجم $=$ حجم بہ حجم $=$ حجم $\epsilon =$ جب $\frac{1}{p}$ نہ جب $\frac{1}{p}$ نہ
تو ثابت کرو کہ \pm مس $\frac{1}{p} \epsilon =$ مس $\frac{1}{p} \epsilon$ مس $\frac{1}{p} \epsilon$ بہ

(۲۴) اگر $a + b = 10$ ، اور $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1$ ، مس $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ ج تو ثابت کرو کہ

مس $\frac{3}{4}$ ا + مس $\frac{3}{4}$ ب + مس $\frac{3}{4}$ ج = مم $\frac{3}{4}$ ا + مم $\frac{3}{4}$ ب + مم $\frac{3}{4}$ ج
(۲۸) اگر مس $\frac{1}{4}$ (ا + ی) + مس $\frac{1}{4}$ (ی + لا) + مس $\frac{1}{4}$ (لا + ا) = .
تو ثابت کرو کہ جب لا + جب ا + جب ی + ۳ جب (لا + ا + ی) = .
(۲۹) ثابت کرو کہ

$\text{حجم } \frac{1}{4} \text{ جب } (\text{ط} + \text{ع}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{حجم } \frac{1}{4} \text{ جب } (\text{ط} + \text{ب}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ج} - \text{ع})$
 $+ \text{حجم } \frac{1}{4} \text{ جب } (\text{ط} + \text{ج}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ع} - \text{ب})$
 $= 2 \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ج}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ج} - \text{ع}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ع} - \text{ب}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ط})$
 (۳۰) حل کرو مساواتیں

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

(۳۱) اگر $\frac{\text{جب } (+ع) \text{ جب } (-ف-ع)}{\text{جب } (+ع+ف) \text{ جب } (-ق-ع)} = \frac{\text{جب } (+ع+\frac{ع}{۲}+۲ط)}{\text{جب } (\frac{ع}{۴}-\frac{ع}{۲}+۲ط)}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{ع}{۴} + ع + ج = \frac{ع}{۲} - ج - ج$

(۳۲) اگر $\text{مس} = \left(\frac{1}{4} + \pi \frac{1}{4}\right)$ و $\text{مس} = \left(\frac{1}{4} + \pi \frac{1}{4}\right)$ نہ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(1 + \text{ع}^2 \text{ج}^2 \text{ذ}) (1 + \text{ب}^2 \text{ج}^2 \text{ذ})}{(1 + \text{ع}^2 \text{ج}^2 \text{ذ}) (1 + \text{ب}^2 \text{ج}^2 \text{ذ})}$$

اور یہ معلوم کرو۔

(۳۳) اگر $e = \alpha + \beta + \gamma$ تو ثابت کرو کہ

مسٲا (مس ۱۴ پس ۱۴ جہ) + مسٲا (مس ۱۴ جس ۱۴ عہ) + مسٲا (مس ۱۴ عہس ۱۴ بہ) !

$$= \{ 1 + \frac{a \text{ جب } 1 + e \text{ جب } 1 + b \text{ جب } 1 + c \text{ جب } 1}{\text{جب } 1 + e + \text{جب } 1 + b + \text{جب } 1 + c} \}$$

(۳۴) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\text{حم} \frac{1}{4} - \text{ج} \frac{1}{4} - \text{ع} \frac{1}{4} - \text{حم} \frac{1}{4}}{\text{حم} \frac{1}{4} + \text{ج} \frac{1}{4} + \text{ع} \frac{1}{4} + \text{حم} \frac{1}{4}}$$

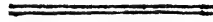
تو ثابت کرو کہ ہر کسر

جم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + بہ)

کے مساوی ہے اور نیز

$\left\{ \text{مس} - \frac{1}{4} \text{مس} (بہ + جہ) \right\} \setminus \left\{ \text{مس} + \frac{1}{4} \text{مس} (بہ + جہ) \right\}$

کے مساوی ہے۔



بجھتا باب

مختلف مسئلے

(78)

۶۷۔ اس باب میں ہم اُن جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ ان میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے اُن طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ ان جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہو سکتی ہے، تاہم اُن طریقوں کا احتیاط سے مطالعہ کرنے سے جو ہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کئے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

متماثلات اور استحالات

مثالیں

- ۶۸

(۱) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۲ \text{ جب } (ب - ج) + \text{جب } ۲ \text{ جب } (ج - د) + \text{جب } ۲ \text{ جب } (د - ب) \\ = \{ \text{جب } (ب + ج) + \text{جب } (ج + د) + \text{جب } (د + ب) \} \times$$

$$\{ \text{جب (جہ - ب) + جب (بہ - ع) + جب (عہ - جہ) } \}$$

اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب بہ جم عہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ + جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم عہ + جب عہ جم جہ) - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ) کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب جہ جم بہ = جم بہ جب عہ = جب عہ جب جہ = جب جہ جم بہ اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے، باقی رہیں

$$= ۲ \text{ جب عہ جم عہ (جب بہ جم جہ) + ۲ جب بہ جم بہ (جب جہ جم عہ) - جم جہ جب عہ (جب عہ جم جہ) + ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم بہ) - جب عہ جم بہ (جب بہ جم عہ) } =$$

$$= ۲ \text{ جب عہ جب (بہ - جہ) + ۲ جب بہ جب (جہ - عہ) + ۲ جب جہ جب (عہ - بہ)؛}$$

اس طرح متانلہ

$$\{ ۲ \text{ جب عہ جب (بہ - جہ) = ۲ جب بہ جب (جہ - عہ) + ۲ جب جہ جب (عہ - بہ) } \}$$

ثابت ہو چکی۔

(۲۱) پچھلی مثال میں عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{۲۲}$ ، $\frac{1}{۲۲}$ ، $\frac{1}{۲۲}$ + جہ رکھو تو متانلہ ذیل حاصل ہوگی :-

$$\{ \text{جم انہ جب (بہ - جہ) = ۲ جم (بہ + جہ) + ۲ جب (جہ - بہ) } \}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\{ ۲ \text{ جب عہ جب (بہ - جہ) = ۲ جب عہ (بہ + جہ) + ۲ جب (جہ - عہ) + ۲ جب (عہ - جہ) } \}$$

اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب کی مقداروں جب عہ، جب بہ، جب جہ کی بجائے ان کے مماثل صغفی زاویوں کی جیوب کی رقوم میں جو جملے ہیں ان کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

ہو جاتا ہے

$$\frac{۲}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج) - \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج)$$

$$یا - \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج) ، بموجب مثال (۳) دفعہ ۲۵ -$$

اب ہم جیوب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیوب التمام کے فرق رکھتے ہیں
تو جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{۱}{۳} \{ \text{جم } (۳ + ب - ج) - \text{جم } (۳ - ب + ج) + \text{جم } (۲ + ب + ج - ع) \}$$

$$- \text{جم } (۳ - ب - ج + ع) + \text{جم } (۳ + ج - ب - ع) - \text{جم } (۳ - ج - ب + ع) \}$$

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

$$۲ \text{ جب } ۲ (ج-ع) \text{ جب } (ع + ب + ج)$$

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں ، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ

لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$- \frac{۱}{۳} \text{ جب } (ع + ب + ج) \text{ جب } ۲ (ج-ع)$$

$$یا - \text{جب } (ع + ب + ج) \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

$$\text{بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۷ -}$$

$$(۴) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{۲}{۳} \text{ جم } ۳ \text{ جب } (ب-ج) = \text{جم } (ع + ب + ج) \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{۲}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج) = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقعہ سے مستنبط ہوگا کہ لا + ما + ی = ۳ لا ما ی کا ایک جزو

ضربی لا + ما + ی ہے -

$$\text{رکھو لا} = \text{جب } ۳ \text{ جب } (ب-ج) ، \text{ما} = \text{جب } ۳ \text{ جب } (ج-ع) ، \text{ی} = \text{جب } ۳ \text{ جب } (ع-ب)$$

اور 3 جم ۲ جب (ب-ج) جم (ج-د) جم (د-ه) جم = $\frac{1}{4}$ جم ۳ جب ۲ جب (ب-ج) جم

۱۔ جب ۲ (ج۔ ع) - جب ۲ (ع۔ ب) {

$$= \frac{1}{4} \cdot 3 \text{ جم } ۱ \text{ جب } ۱ - \frac{1}{4} \cdot 3 \text{ جم } ۲ \text{ جب } ۲ = (ب-ج)$$

= جب (۲-جہ) جب (جہ-عہ) جب (عہ-۲) ۳۰ جم ۲۷

پس مذکورہ بالا شمار کنندہ

= جب (ب-ج) جب (ج-د) جب (د-ع) جب (ع-ب) { ۳۲ جم (ب+ج) + ۳ جم ۲ عہ کی؟

اس لیے یہ جملہ = 3^2 حم (ب + ج) + 3 حم ۲ عہ

(۹) اگر

$$\pi = \frac{1}{n} (a + b + c) \quad \text{اور} \quad \frac{1}{n} (a + b + c) = \frac{1}{n} (a + b + c) \quad \text{مس} \quad \frac{1}{n} (a + b + c) = \frac{1}{n} (a + b + c)$$

توثابت کرو کہ $1 + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = 0$

دی ہوئی مساوات کا مربع لینے سے،

$$\text{جب } \left(\frac{1}{p} - \pi \frac{1}{q}\right)^2 \text{ جب } \left(\frac{1}{p} - \pi \frac{1}{q}\right)^2 \text{ جب } \left(\frac{1}{p} - \pi \frac{1}{q}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \pi \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \pi \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \pi \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$(1 - \text{جیب } \epsilon)(1 - \text{جیب } \beta)(1 + \text{جیب } \epsilon) = (1 - \text{جیب } \beta)(1 + \text{جیب } \epsilon)(1 + \text{جیب } \beta)$$

(81) پس $\text{جب } e + \text{جب } e + \text{جب } e + \text{جب } e + \text{جب } e = 0$ ۔

یا $۴ \text{ حم } \frac{۱}{۴} = ۴ \text{ حم } \frac{۱}{۴} + ۴ \text{ جب } \frac{۱}{۴} + ۴ \text{ جب } \frac{۱}{۴} = ۰$ ؛

اس لیے $1 + 2 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ ع جب } \frac{1}{p} \text{ ہ جب } \frac{1}{p} \text{ ج } = 0$ ،

نیز $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ جب $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ ؛

اس لیے

$$\text{جم} + \text{ع} + \text{جم} + \text{ب} + \text{جم} + \text{ج} + ۱ = ۰$$

$$(۱۰) \text{ اگر } \frac{1}{\text{مس}} + (\text{ب} + \text{ج} - \text{ع}) \frac{1}{\text{مس}} + (\text{ج} + \text{ع} - \text{ب}) \frac{1}{\text{مس}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{1}{\text{مس}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ جب ۲ ع + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۲ جم ع جم ب جم ج

$$\text{اب } \frac{1}{\text{جب}} + (\text{ب} + \text{ج} - \text{ع}) \frac{1}{\text{جب}} + (\text{ج} + \text{ع} - \text{ب}) \frac{1}{\text{جب}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{1}{\text{جب}} =$$

$$\text{جم} \frac{1}{\text{ب}} + (\text{ب} + \text{ج} - \text{ع}) \frac{1}{\text{جم}} + (\text{ج} + \text{ع} - \text{ب}) \frac{1}{\text{جم}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{1}{\text{جم}} =$$

$$\text{یا } \{ \text{جم} (\text{ب} - \text{ع}) - (\text{جم} + \text{ج}) \} \frac{1}{\text{جب}} + \{ (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) - (\text{جم} + \text{ع}) \} \frac{1}{\text{جم}} + \{ (\text{جم} + \text{ع}) - (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \} \frac{1}{\text{مس}} = ۰$$

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\text{جم} (\text{ب} - \text{ع}) \frac{1}{\text{جم}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{1}{\text{مس}} + (\text{جم} + \text{ج} - \text{ع}) \frac{1}{\text{مس}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{1}{\text{مس}} = ۰$$

اور جب ۲ ع + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۲ جم ع جم ب جم ج

$$۲ = \frac{2}{\text{جب}} + (\text{ع} + \text{ب}) \frac{2}{\text{جم}} - (\text{جم} + \text{ج}) \frac{2}{\text{جم}} + (\text{جم} + \text{ع}) \frac{2}{\text{جم}} - (\text{ع} + \text{ب}) \frac{2}{\text{جب}}$$

$$۲ = \frac{2}{\text{جم}} (\text{ب} - \text{ع}) + \{ (\text{ج} + \text{ع} - \text{ب}) - (\text{ج} + \text{ب} - \text{ع}) \} \frac{2}{\text{مس}} - \{ (\text{جم} + \text{ع}) - (\text{جم} + \text{ج}) \} \frac{2}{\text{جم}} - \{ (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) - (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \} \frac{2}{\text{مس}}$$

$$۲ = \frac{2}{\text{جب}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{2}{\text{مس}} - \{ (\text{جم} + \text{ع}) - (\text{جم} + \text{ج}) \} \frac{2}{\text{جم}} + (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \frac{2}{\text{مس}} + \{ (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) - (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \} \frac{2}{\text{مس}}$$

$$+ \{ (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) - (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \} \frac{2}{\text{مس}} + \{ (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) - (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}) \} \frac{2}{\text{مس}}$$

اور یہ صفر کے مساوی ہے۔

(۱۱) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$۲ \text{ جم } (\text{ا} - \text{ی}) \text{ جم } (\text{ی} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا}) = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$۱ + ۱۲ \text{ جم } (\text{ا} - \text{ی}) \text{ جم } (\text{ی} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا}) + ۲ \text{ جم } (\text{ا} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا})$$

$$= ۲ \text{ جم } (\text{ا} - \text{ی}) \text{ جم } (\text{ی} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا}) + ۳ \text{ جم } (\text{ا} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا})$$

فرض کرو کہ ع = ا - ی، ی = ب - ی، لا = ج = لا

$$\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} = ۰$$

تب

$$\text{پس } ۱ - \text{جم} (\text{ا} - \text{ی}) - \text{جم} (\text{ی} - \text{لا}) + \text{جم} (\text{لا} - \text{ا}) + ۲ \text{ جم } (\text{ا} - \text{ی}) \text{ جم } (\text{ی} - \text{لا}) \text{ جم } (\text{لا} - \text{ا}) = ۰$$

رکھو لا = ک. جم ط، ما = ک. جم ف، ی = ک. جم پ، تب

جم ف + جم پ = ۲. جم ف. جم پ. جم ع = ۱. جم ع،

(جم ع - جم ف. جم پ) = جب ف جب پ

یا اس لیے جم ع = جم (ف ± پ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم ب = جم (ب ± ط) جم ج = جم (ط ± ف) اس لیے عمومیّت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں ع = ف ± پ، ب = پ ± ط، ج = ط ± ف۔ اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں ہمیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے، یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت۔ پہلی صورت میں ط = س، ع = ف = س، ب = پ = س۔ ج = س۔ ج؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} ط = س \\ ف = س - ج \\ پ = ب - س \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = ج - س \\ ف = س \\ پ = س - ب \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = س - پ \\ ف = ع - س \\ پ = س \end{array} \right.$$

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پوری ہوتی ہے۔

مساواتوں کا حل

۴۹ — مثالیں

(۱) حل کرد مساوات

جب ۲ ط ق ۴ ط + جم ۲ ط = جم ۶ ط

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

جب ۲ ط ق ۴ ط + جم ۲ ط - جم ۶ ط = ۰

جب ۲ ط ق ۴ ط + ۲ جب ۴ ط جب ۲ ط = ۰

جب ۲ ط = ۰ یا ق ۴ ط + ۲ جب ۴ ط = ۰

جب ۸ ط = ۱ -

یا
پس
یعنی

اس لیے جب (لا + عم) = - جب عم جم عم

اس لیے حل ہیں

$$لا = ۲ن + ۳عم، اور لا = ن - ۳عم + (۱ -)ن - جب ۱ - (جب عم جم عم) \\ (۳) حل کرو مساواتیں$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب (لا + م) - ب جب (لا - م) = ۲م جم لا} \\ \text{جب (لا + م) + ب جب (لا - م) = ۲ن جم م} \end{array} \right.$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ن} \{ \text{جب (لا + م) + ب جب (لا - م) } \} - \frac{۱}{م} \{ \text{جب (لا + م) - ب جب (لا - م) } \} \\ = ۲ = (جم - جم لا) = ۴ جب (لا + م) جب (لا - م)$$

$$\text{فرض کرو جب (لا + م) = ت توت حسب ذیل دو درجی مساوات سے}$$

ملیگا

$$\begin{aligned} & \text{ت}^۲ \left(\frac{۱}{ن} - \frac{۱}{م} \right) + ۲ت \{ \text{جب (لا + م) } \} - \left(\frac{۱}{م} + \frac{۱}{ن} \right) ۲ = \\ & + \text{ب}^۲ \left(\frac{۱}{م} - \frac{۱}{ن} \right) = ۰ \end{aligned}$$

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

$$ت = \frac{\text{جب (لا + م)}}{\text{جب (لا - م)}} = \frac{\text{مس لا + مس م}}{\text{مس لا - مس م}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{مس لا}}{\text{مس م}} = \frac{ت + ۱}{ت - ۱}$$

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{م جم لا}}{\text{ن جم م}} = \frac{\text{ت - ب}}{\text{ت + ب}}$$

اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ $قط^۲ = م^۲ - ۱$ کے ذریعہ $ا$ کو ساقط کرنے سے

$$\frac{ن^۲}{م^۲} \left(\frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right)^۲ = قط^۲ - ۱ = م^۲ - ۱$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$م^۲ - ۱ = \left\{ \frac{ن^۲}{م^۲} \left(\frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right)^۲ \right\} - \left\{ \frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right\}^۲$$

اس سے $م$ لاکے چار قیمتیں ملتی ہیں جن میں سے دو، دو اُس دو درجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے۔ اس طرح لامعلوم ہو چکا اور پھر $ا$ اس مساوات

$$م^۲ - ۱ = \frac{اوت - ب}{اوت + ب} م^۲$$

سے لجاتا ہے۔

استقاط

(84)

۷۔ مثالیں۔

(۱) مساواتوں $\frac{جم^۲ ط}{جم(ع-ط)} = \frac{جب^۲ ط}{جب(ع-ط)}$ سے $م$ سے ط ساقط کرو۔

چونکہ $م = \frac{جب ط جم ط}{جب(ع-ط)} = \frac{جم ط جب ط}{جب(ع-ط)}$

اس لیے $\frac{۱}{م} = \frac{جب ع جم ط}{جم ط جب ط} = \frac{جب ع}{جم ط}$

نیز $م = \frac{جم ط جم(ع-ط) - جب ط جب(ع-ط)}{جم ط جب ط} = \frac{جم ط (جم(ع-ط) - جب ط جب(ع-ط))}{جم ط جب ط}$

$= \frac{جم ط (جم ع - جم ط - جب ط جب ع + جب ط جب ط)}{جم ط جب ط}$

$$\text{پس } \left(\frac{1}{2} \text{ جم} + \text{جم} \right) \left(\frac{1}{2} \text{ جم} - \text{جم} \right) = \text{جب}^2 \text{ ع}$$

$$\text{یا } 2 \text{ جم}^2 - 1 = \text{جم} \cdot \text{جم} \text{ ع}$$

اور یہ مطلوبہ حاصل استغاثہ ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\frac{\text{جم}^3 (\text{ط} - \text{ع})}{\text{جم} (\text{ط} - \text{ب})} = \frac{\text{جم}^3 (\text{ط} + \text{ع} - \text{ج})}{\text{جم} (\text{ط} + \text{ب} - \text{ج})} = \frac{\text{جم}^3 \text{ ع}}{\text{جم} \text{ ب}}$$

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ ب سے آزاد ہے۔
مساوات

$$\frac{\text{جم}^3 (\text{لا} - \text{ع})}{\text{جم} (\text{لا} - \text{ب})} = \frac{\text{جم}^3 \text{ ع}}{\text{جم} \text{ ب}}$$

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تابع قیمتیں ط، ج، ب اور صفر ہیں۔ اسلئے
جم ۳ لا جم ۳ ع + جب ۳ لا جب ۳ ع = ک (جم لا جم ب + جب لا جب ب)
جہاں ک = جم ۳ ع \setminus جم ب؛ جم ۳ لا جب ۳ لا کی بجائے ان کی قیمتیں علی الترتیب
جم لا جب لا کی رقوم میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو جم لا سے تقسیم کرنے سے
مس لا (= ت) میں حسب ذیل کبھی مساوات ملتی ہے

$$\text{جم}^3 \text{ ع} \{ ۳ - (۱ + \text{ت}) \} + \text{جب}^3 \text{ ع} \{ ۳ \text{ ت} - (۱ + \text{ت}) \} - ۳ \text{ ت}^3$$

$$= \text{ک} (\text{جم} \text{ ب} + \text{ت جب ب}) (۱ + \text{ت})$$

$$\text{یا } \text{ت}^3 (\text{ک جب ب} + \text{جب ۳ ع}) + \text{ت}^2 (\text{ک جم ب} + \text{جم ۳ ع}) +$$

$$\text{ت} (\text{ک جب ب} - \text{جب ۳ ع}) + \text{ک جم ب} - \text{جم ۳ ع} = ۰$$

اس لیے دو درجی مساوات

$$ت^۲ (ک جب ہ + جب ۳) + ت (ک جم ہ + جم ۳) + ک جب ہ$$

$$- ۳ جب ۳ = ۰$$

کی اصلیں مس ط اور مس (جہ - ط) ہیں ؟

$$اس لیے \quad مس ط + مس (جہ - ط) = \frac{ک جم ہ + جم ۳}{ک جب ہ + جب ۳}$$

$$اور \quad مس ط مس (جہ - ط) = \frac{ک جب ہ - ۳ جب ۳}{ک جب ہ + جب ۳}$$

$$پس \quad مس جہ = \frac{-(ک جم ہ + جم ۳)}{۴ جب ۳} = - ۳ جم ۳$$

$$یا \quad ج - ۳ = \pi \frac{1}{4} (۱ + ۲) = \pi$$

(85) جہاں رکوئی صحیح عدد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط بہ پر منحصر نہیں ہے۔

(۳) مساواتوں

$$\frac{لا جم ط}{ب} + \frac{ما جب ط}{ب} = \frac{ا لا جب ط - ما جم ط}{ب} = (ا جب ط + ب جم ط) \frac{1}{ب}$$

سے ط ساقط کر دو۔

ہر مساوات کا مربع کو اور مس ط = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$ت^۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) - ۲ ت \frac{ا}{ب} + (۱ - \frac{ا}{ب})^۲ = ۰$$

$$ت^۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) + ۲ ت (۱ - \frac{ا}{ب}) + (۱ - \frac{ا}{ب})^۲ = ۰$$

ان مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت اور ت کے لیے حل کرنے سے

$$\frac{۱۵۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) + \frac{ا}{ب}}{۱} = \frac{۱۵۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) - \frac{ا}{ب}}{۱} = \frac{۱۵۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) + \frac{ا}{ب}}{۱}$$

پس

$$\left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} = \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\}$$

$$یا \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} = \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\} \left\{ \frac{2}{ب} - \frac{2}{ا} \right\}$$

$$اس لیے \frac{2}{ب} + \frac{2}{ا} = 2 + 2$$

حاصل استقاط ہے۔

(۲) مساواتوں

$$لا جب ط + ما جم ط = ۲ ر جب ۲ ط$$

$$لا جم ط - ما جب ط = ۲ ر جم ط$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$لا = ر جم ط (۲ - جم ط) ، ما = ر جب ط (۲ + جم ط)$$

$$یا لا = ر جم ط (جم ط + ۳ جب ط) ، ما = ر جب ط (جم ط + ۳ جب ط)$$

$$اس لیے لا + ما = ر (جم ط + جب ط) ، لا - ما = ر (جم ط - جب ط)$$

$$پس (لا + ما) = \frac{2}{ر} (۱ + ۱) ، (۱ + ۱) جب ط = \frac{2}{ر} (۱ - ۱) جب ط$$

اور حاصل استقاط ہے

$$\frac{2}{ر} = \frac{2}{ر} (۱ - ۱) + \frac{2}{ر} (۱ + ۱)$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے

۱۷۔ مثالیں -

$$(۱) \text{ مساوات } \quad \text{ا.جم ط} + \text{ب جب ط} = \text{ج}$$

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ط کی دو الگ الگ قیمتیں ع بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$\text{ا.جم ع} + \text{ب جب ع} = \text{ج}$$

$$\text{ا.جم بہ} + \text{ب جب بہ} = \text{ج}$$

اس لیے

(86)

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب بہ - جب ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ع - جم بہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب (بہ - ع)}}$$

$$\text{مس } \frac{1}{\text{ب}} = (\text{بہ} + \text{ع}) = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$$

اور نیز $\frac{1}{\text{ج}} \cdot \text{جم} = \frac{1}{\text{بہ - ع}} = \frac{1}{\text{ب}} \cdot \text{جب} = \frac{1}{\text{بہ} + \text{ع}} = \frac{1}{\text{ج}}$ جم $\frac{1}{\text{ب}} = (\text{بہ} + \text{ع})$
 ان رشتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے :- رکھو $\text{مس } \frac{1}{\text{ط}} = \text{ا}$
 تو دی ہوئی مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ا} (۱ - \text{ا}) = ۲\text{ب} + \text{ج} (۱ + \text{ا})$$

$$\text{یا } \text{ا} (۱ + \text{ج}) - ۲\text{ب} = \text{ج} - \text{ا}$$

اس دو درجہ کی اصلیں $\text{مس } \frac{1}{\text{ع}}$ مس $\frac{1}{\text{بہ}}$ ہیں، اس لیے

$$\text{مس } \frac{1}{\text{ع}} = \text{مس } \frac{1}{\text{بہ}} = \frac{\text{ا} - \text{ج}}{\text{ا} + \text{ج}}$$

اس لیے ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جم} \cdot \frac{1}{\text{بہ - ع}}}{\text{جم} \cdot \frac{1}{\text{بہ} + \text{ع}}}$$

$$\text{نیز } \text{مس } \frac{1}{\text{ع}} + \text{مس } \frac{1}{\text{بہ}} = \text{مس } \frac{2}{\text{ا} + \text{ج}}$$

جس سے دوسرا ربط حاصل ہو سکتا ہے۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

حم عہ حم ط - جب عہ جب ط - ک حم ۲ عہ = ۰

حم بہ حم ط - جب بہ جب ط - ک حم ۲ بہ = ۰

حم جہ حم ط - جب جہ جب ط - ک حم ۲ جہ = ۰

پس حم ط اور جب ط کو ساقط کرنے سے

ک حم ۲ عہ جب (بہ - ج) = ۰

یا ک حم (بہ + ج) جب (جہ - بہ) = ۰ بموجب مثال (۲) دفعہ ۶۸

پس ک حم (بہ + ج) = ۰ مولے اس صورت میں جب کہ ک حم (جہ - بہ) = ۰

یعنی جبکہ جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ - ج) جب $\frac{۱}{۲}$ (جہ - عہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ - بہ) = ۰

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہو سکتی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتیں - لاتساویات

۷۲ — مثالیں —

(۱) احم ط + ب جب ط

کی بڑی سے بڑی قیمت ہے $\overline{ما\alpha + \beta}$

رکھو $\frac{۱}{۲} = مس\text{ عہ تو ب} = \overline{ما\alpha + \beta}$ جب عہ ا = $\overline{ما\alpha + \beta}$ حم عہ

اس طرح احم ط + ب جب ط = $\overline{ما\alpha + \beta}$ حم (ط - عہ)

اب چونکہ حم (ط - عہ) ہمیشہ \pm کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لیے احم ط عہ جب عہ

$\pm \overline{ما\alpha + \beta}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(۲) اگر $ع = \overline{ما\alpha}$ حم ط + ب جب ط + $\overline{ما\alpha}$ جب ط + ب حم ط

تو، $ر + ب$ اور $لا$ $۲(ر + ب)$ کے درمیان واقع ہوگا۔

فرض کرو $لا = ر + جم ط + ب$ جب $ط = \frac{۱}{۲}(ر + ب) + \frac{۱}{۲}(ر - ب)$ جم $۲ ط$

تب $ع = لا + [ر + ب - لا]$

$$ع = ر + ب + ۲(ر + ب) - \frac{۱}{۲}(ر + ب) - \frac{۱}{۲}(ر - ب) = ۲(ر + ب) - \frac{۱}{۲}(ر - ب)$$

پس $ع$ بڑے سے بڑا ہے جبکہ $لا = \frac{۱}{۲}(ر + ب)$ باء کی بڑی سے بڑی قیمت

$۲(ر + ب)$ کے لیے نیز $ع$ کم سے کم ہے جبکہ $\frac{۱}{۲}(ر + ب) - لا$

بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ $لا$ کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ جم $ط = ۱$

اور اس صورت میں $لا = ب$ اور تب $ع = ر + ب$ اس لیے یہی کم سے کم

قیمت ہے۔

(۳) اگر $ط$ ، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم \frac{۱}{۲} ط - مم ط < ۲$$

چونکہ

$$مم \frac{۱}{۲} ط - مم ط = \frac{مم \frac{۳}{۲} ط}{جب \frac{۱}{۲} ط جب ط} = \frac{۳ - مم جب \frac{۱}{۲} ط}{جب ط} = \frac{۱ + مم - مم ط}{جب ط}$$

پس $مم \frac{۱}{۲} ط - مم ط = مم ط + مم \frac{۱}{۲} ط$ ؛

اب اگر $ط$ ، صفر اور π کے درمیان واقع ہے تو $مم ط$ اور $مم \frac{۱}{۲} ط$ ہر ایک اکائی سے

ہرگز کم نہیں ہو سکتا، اس لیے $مم \frac{۱}{۲} ط - مم ط < ۲$ ،

(۴) اگر n زاویوں کا جن میں سے ہر ایک قیمت ہے اور $\frac{1}{n} \pi$ سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ ان زاویوں کی جیوب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیوب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔

فرض کرو کہ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ عین زاویے ہیں اور ان کا حاصل جمع α ہے۔

تب جب $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2$ جب $\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots)$ اور چونکہ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (عین) ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ $\alpha = \beta = \gamma = \dots$

اس لیے جب $\alpha + \beta + \gamma + \dots > 2$ جب $\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots)$

اگر $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ اس لیے اگر $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ عین میں سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم ان دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کر کے $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ کو بڑھا سکتے ہیں، پس $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ سے بڑا ہے جب سب زاویے مساوی ہوں؛

اس لیے $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ جب $\frac{1}{n} \pi$ -

نیز جب $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots)$ -

اور یہ $\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots) > \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots)$ -

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (عین)

اگر $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ - پس حسب سابق اگر حاصل ضرب جب $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ جب عین میں کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم ان زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے اوسط حسابی کو درج کر کے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ جب عین بڑے سے بڑا ہے جبکہ $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \alpha + \beta + \gamma + \dots$ اور اس

حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب $\frac{1}{n} \pi$) ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں۔
 چونکہ
 قم عر + قم عس

$$= \text{جب } \frac{1}{4} (\text{عر} + \text{عس}) \left\{ \frac{1}{4} (\text{جرم} - \text{عس}) - \frac{1}{4} (\text{جرم} + \text{عر} + \text{عس}) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} (\text{جرم} - \text{عس}) + \frac{1}{4} (\text{جرم} + \text{عر} + \text{عس})$$

پس عر + عس کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم عر + قم عس کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ
 جرم $\frac{1}{4} (\text{عر} - \text{عس}) = ۱$ یا جبکہ عر = عس۔ اس کے بعد استدلال کی صورت وہی ہوگی
 جو پچھلی مثال کی ہے۔

(89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے تماموں
 یا محاسن التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں۔
 (۷) اگر $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ تو ثابت کرو کہ
 جرم عر + جرم عس + جرم عر = $\frac{1}{2}$

مساواتوں کے استنباطی نظام

۳۔ — مساواتوں کے نظام کو استنباطی کہا جائیگا جب کہ مساواتیں
 باہم موافق نہ ہوں الا آنکہ ہر ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔
 جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لا متناہی ہونگے۔

نظام

۱. جم بہ جم جہ + ب جب بہ جب جہ + ج + ا (جب بہ + جب جہ) + ب (جم بہ + جم جہ)
+ ج جب (بہ + جہ) = ۰

۲. جم جہ جم عہ + ب جب جہ جب عہ + ج + ا (جب جہ + جب عہ) + ب (جم جہ + جم عہ)
+ ج جب (جہ + عہ) = ۰

۳. جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ + ج + ا (جب عہ + جب بہ) + ب (جم عہ + جم بہ)
+ ج جب (عہ + بہ) = ۰

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔

مساوات

۱. جم عہ جم طہ + ب جب عہ جب طہ + ج + ا (جب عہ + جب طہ) + ب (جم عہ + جم طہ)
+ ج جب (عہ + طہ) = ۰

پر غور کرو۔ یہ مساوات پوری ہوتی ہے طہ = بہ اور طہ = جہ سے۔ اس کو مس ۱ طہ = م
کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح:

م^۲ (-) (جم عہ + ج + ا) جب عہ + ب (جم عہ - ب - ج جب عہ)
+ ۲ م (ب جب عہ + ا + ج جم عہ) + (جم عہ + ج + ا) جب عہ + ب + ب (جم عہ)
+ ج جب (عہ) = ۰

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

مس ۱ طہ = مس ۱ جہ اور مس ۱ طہ = مس ۱ جہ

مس ۱ طہ = مس ۱ جہ = ۲ (ب جب عہ + ا + ج جم عہ) / ۲ (جم عہ + ج + ا) جب عہ + ب + ب (جم عہ)
+ ج جب (عہ)

اسی طرح ہمیں حاصل ہونا چاہیے

مس ۱ طہ = مس ۱ جہ = ۲ (ب جب بہ + ا + ج جم بہ) / ۲ (جم بہ + ج + ا) جب بہ + ب + ب (جم بہ)
+ ج جب (بہ)

اب ہم $\frac{1}{4}$ (ع - ب) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں؛ یہ قیمت ایک کسر ہوگی جس کا شمار کنندہ ہے

$$(ب جب ب + ا + ج جم ب) (ا جم ع + ب + ج جب ع) - (ب جب ع + ا + ج جم ع) \\ \times (ا جم ب + ب + ج جب ب)$$

یا

$$۲ جب \frac{1}{4} (ع - ب) \{ (ج - ا ب) جم \frac{1}{4} (ع - ب) + (ا ج - ب ب) جم \frac{1}{4} (ع + ب) \} \\ - (ا ا - ب ج) جب \frac{1}{4} (ع + ب) \{$$

(90) اور نسب نما ہے

$$(ب جب ع + ا + ج جم ع) (ب جب ب + ا + ج جم ب) + (ا جم ع + ب + ج جب ع) \\ (ا جم ب + ب + ج جب ب)$$

یا

$$(ا + ج) جم ع جم ب + (ب + ج) جب ع جب ب + (ا + ب) جم ع جم ب + (ب + ج) جب ع جب ب \\ + (ا ب + ب ج) (ب جب ع + ج جب ب) + (ا ج + ا ب) (جم ع + جم ب) + (ا + ب) ج جب (ع + ب) :$$

اس کسر کو جب $\frac{1}{4}$ (ع - ب) سے تقسیم کر تو یہ نسب نما

$$= (ج - ا ب) \{ ا جم (ع - ب) \} + (ا ج - ب ب) (جم ع + جم ب) - (ا ا - ب ج) (ب جب ع + جب ب)$$

پس

$$(ا + ب) (ا جم ع جم ب + ب جب ع جب ب + ج + ا (ب جب ع + جب ب) \\ + ب (جم ع + جم ب) + ج جب (ع + ب) \{$$

$$= ج - ا - ب + ج + ا + ج - ب - ا ب$$

اس لیے جب تک کہ شرط

$$ج - د - ۲ = ۱ + ج + ۱ + ج + ب - ۱ = ۰$$

پوری نہ ہو مساواتوں کا دیا ہوا نظام پورا نہیں ہو سکتا سوائے $ع = ب = ۰$ جو
کی مساوی قیمتوں کے۔ جب یہ شرط پوری ہو تو کوئی ایک مساوات باقی دو مساواتوں
سے اخذ کی جاسکتی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنا

۴۔ بہت سے سلسلے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں فرقوں
کے طریقہ سے جمع کیے جاسکتے ہیں۔ اس طریقہ کے استعمال کی سب سے
اہم مثال وہ سلسلہ ہے جو ان مقداروں کی جیوب یا جیوب التمام کا
ہوتا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$س = جم + ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ + ب) + \dots + جم (ع + (ن - ۱) + ب)$$

اب چونکہ

$$جم + ع = \frac{۱}{۲} جب \frac{۱}{۲} ب - [جب (ع + \frac{۱}{۲} ب) - جب (ع - \frac{۱}{۲} ب)]$$

$$جم (ع + ب) = \frac{۱}{۲} جب \frac{۱}{۲} ب - [جب (ع + \frac{۳}{۲} ب) - جب (ع + \frac{۱}{۲} ب)]$$

$$جم (ع + (ن - ۱) + ب) = \frac{۱}{۲} جب \frac{۱}{۲} ب - [جب (ع + \frac{ن - ۱}{۲} ب) - جب (ع + \frac{ن - ۳}{۲} ب)]$$

$$اس لیے س = \frac{۱}{۲} ق + \frac{۱}{۲} ب - [جب (ع + \frac{ن - ۱}{۲} ب) - جب (ع - \frac{۱}{۲} ب)]$$

$$= جم (ع + \frac{ن - ۱}{۲} ب) جب \frac{ن - ۱}{۲} ق + \frac{ن - ۱}{۲} ب - \dots (۱)$$

(91)

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{جب } \text{ع} + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) + \dots + \text{جب } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

$$= \text{جب } (\text{ع} + \frac{\text{ا} - \text{ن}}{\text{پ}} + \text{ب}) \text{ جب } \frac{\text{ن}}{\text{پ}} \text{ ب } \text{ق} \text{م} \text{پ} \text{،} \dots \dots \dots (2)$$

اس حاصل جمع کو (۱) میں ع کی بجائے ع + $\frac{\text{ا}}{\text{پ}}$ درج کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(۱) میں ب کی بجائے ب + $\frac{\text{ا}}{\text{پ}}$ رکھو تو سلسلہ

$$\text{جم } \text{ع} - \text{جم } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جم } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) - \dots + (\text{ا} - \text{ن}) \text{ جم } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

کا حاصل جمع ہوگا

$$\text{جم } (\text{ع} + \frac{\text{ا} - \text{ن}}{\text{پ}} + \text{ب}) \text{ جم } \frac{\text{ن}}{\text{پ}} \text{ ب } \text{ق} \text{ط} \text{پ} \text{،} \text{ یا جب } (\text{ع} + \frac{\text{ا} - \text{ن}}{\text{پ}} + \text{ب}) \text{ جب } \frac{\text{ن}}{\text{پ}} \text{ ب } \text{ق} \text{ط} \text{پ}$$

ہو جب اس کے کن طاق ہو یا جفت۔

سلسلہ

$$\text{جب } \text{ع} - \text{جب } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) - \dots$$

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب } \text{ن} \text{ ع}}{\text{جب } \text{ع}} = 2 \{ \text{جم } (\text{ن} - 1) \text{ ع} + \text{جم } (\text{ن} - 3) \text{ ع} + \text{جم } (\text{ن} - 5) \text{ ع} + \dots \}$$

نیز جم ن ع / جم ع کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم } \text{ع} + \text{جم } (\text{ع} + \text{ب}) + \dots + \text{جم } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

جواب: $\dots \left\{ (n+m)^2 j + 1 \right\} \frac{1}{j} = (n+m)^2 j. (n^2 j + 1) \frac{1}{j} = n^2 j$ وکند

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \text{ جم } \{ 2^n + (n-1) \} \text{ جب } n \text{ : رقم به}$$

اسی طرح سلسلوں (۱۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی مثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ

معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) جمع کروں گا۔ قم ۲ + قم ۲ + . . . + قم ۲

چونکہ قم ۲ نہ - - - - - قم ۲ نہ = قم ۲ نہ - قم ۱ نہ ...

م ۲ = م ۱ - م ۲

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے $mm^6 - mm^2$

(۴) جمع کرد و سلسلہ

$$\frac{\text{جیب } 1^\circ - \text{جیب } 3^\circ}{\text{حم } 1^\circ} + \dots + \frac{\text{جیب } 3^\circ - \text{جیب } 5^\circ}{\text{حم } 3^\circ} + \frac{\text{جیب } 5^\circ - \text{جیب } 7^\circ}{\text{حم } 5^\circ}$$

چونکہ $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{l}$ - $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{l}$

$$\frac{3 \text{ جب } 3^{-1} \text{ لا } 3 \text{ جم } 3^{-1} \text{ لا } 3 \text{ لا جب } 3^{-1} \text{ لا}}{3 \text{ جم } 3^{-1} \text{ لا } 3 \text{ لا جب } 3^{-1} \text{ لا}} =$$

$$\frac{2 \text{ جب } 3 \text{ لا } (2 \text{ جم } 3 \text{ لا } 2 \text{ جم } 3 \text{ لا})}{3 \text{ جم } 3 \text{ لا } 2 \text{ جم } 3 \text{ لا}} = \frac{2 \text{ جب } 3 \text{ لا } - \text{جم } 3 \text{ لا} \times 2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}{3 \text{ جم } 3 \text{ لا} - \text{جم } 3 \text{ لا}}$$

$$\frac{3 \text{ جب } 3^1 \text{ لا } 3 \text{ جب } 3^1 \text{ لا}}{3 \text{ جم } 3^1 \text{ لا}} = \frac{3 \text{ جب } 3^1 \text{ لا } 3 \text{ جم } 3^1 \text{ لا}}{3 \text{ جم } 3^1 \text{ لا } 3 \text{ جم } 3^1 \text{ لا}} =$$

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم ۱ + جم (۲ + ب) + جم (۳ + ب) + ... + جم (ن + ب) + جم (ن - ۱ + ب) {
یہ سلسلہ کچھلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو ۲ (۱ - جم ب) سے ضرب دیا جائے۔

۷۶ — سلسلہ

جم ۱ + لا جم (۲ + ب) + لا جم (۳ + ب) + ... + لا جم (ن - ۱ + ب) {
جب ۱ + لا جب (۲ + ب) + لا جب (۳ + ب) + ... + لا جب (ن - ۱ + ب) {
متوالی سلسلے میں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of retation) ۱ - ۲ لا جم ب + لا ہے
کیونکہ

$$\text{جم (۱ + ب)} + \text{جم (۲ + ب)} = ۲ \cdot \text{جم (۱ + ب)} + \text{جم (۱ - ب)}$$

$$\text{اور جب (۱ + ب)} + \text{جب (۲ + ب)} = ۲ \cdot \text{جب (۱ + ب)} + \text{جب (۱ - ب)}$$

اس لیے ان کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمولی قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا ہے۔ اگر اس سے پہلے سلسلہ کا حاصل جمع تعبیر ہو تو

$$\text{س (۱ - ۲ لا جم ب + لا)}$$

$$= \text{جم ۱ - لا جم (۲ + ب) - لا جم (۳ + ب) + لا جم (ن + ب) + لا جم (ن - ۱ + ب)}$$

اگر لا > ان کو لا انتہا بڑا کرنے سے لا قنایہی سلسلہ

$$\text{جم ۱ + لا جم (۲ + ب) + لا جم (۳ + ب) + ...}$$

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{جم ۱ - لا جم (۲ + ب)}}{۱ - ۲ لا جم ب + لا}$$

رکھو $e = 0$ تو

$$1 + \text{لاجم } b + \text{لاجم } 2b + \dots + \infty \text{ تک} = \frac{1 - \text{لاجم } b}{1 - \text{لاجم } 2b}$$

اس لیے نیز

$$1 + 2 + \text{لاجم } b + 2 + \text{لاجم } 2b + \dots + \infty \text{ تک} \dots (3)$$

بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم مثلاً دفعہ ۴ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لینگے۔

(94)

فرض کرو کہ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں اور فرض کرو کہ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے درمیان زاویہ b ہے جہاں 1 دائرہ کا مرکز ہے، خط استقیم 1 دلا کر $e = 1$ تب $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے میلان 1 کے ساتھ علی الترتیب ہیں

$$e = e + b + e + 2b + \dots + (n-1)b$$

اور 1 کا میلان $e + \frac{1}{n} (n-1)b$ ہے، نیز اگر دائرہ کا قطر 1 ہو تو

$$1 = 1 = \frac{1}{n} \text{ جب } b = 1 \text{ اور } 1 = \frac{1}{n} \text{ جب } b = 1$$

اب دلاؤ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے غلطوں کا مجموعہ ہے

$$1 + \text{لاجم } (e) + 1 + \text{لاجم } (e + b) + \dots + 1 + \text{لاجم } (e + (n-1)b)$$

$$1 + \text{لاجم } (e) + 1 + \text{لاجم } (e + b) + \dots + 1 + \text{لاجم } (e + (n-1)b)$$

اور یہ مجموعہ 1 کے غلطوں کے مساوی ہونا چاہیے جو یہ ہے

$$1 + \text{لاجم } (e) + \frac{1}{n} (n-1)b$$

۱! ق جب $\frac{1}{p}$ ن بہ جم {ع + $\frac{1}{p}$ (ن-۱) بہ {

اس لیے

$$\{n(1-u) + u\}^m + \dots + (n+u)^m + u^m$$
$$= \text{مجم.} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} (1-n) \right\} \text{جب } \frac{1}{p} n \text{ بہ فہم } \frac{1}{p} \text{ بہ}$$

اگر ہم دلا کے عمود دار خط مستقیم پر تلےیں تو محبوب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملے گا۔

اسلام

(۱) ایک دائرہ کا قطر OA ہے، اس کے محیط پر D ، F ، C ... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں $\angle AOF$ ، $\angle FOC$ ، $\angle COD$... میں سے ہر ایک 60° ہے۔ $\angle AOC$ ، $\angle AOD$... دیکھو اس سے $\angle FOC$ پر پڑتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ $قط م + قط (م+۱) + قط (م+۲) + \dots + قط (ن)$ کے مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر a, b, c ... کے زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

پچھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں $\text{حجم ط} + \text{ب} = \text{ب} + \text{حجم ط} = \text{ب} + \text{حجم ط} + \text{حجم ط} = \text{ج}$

سے ملے سا قلم کرو۔

(۲) مساواتوں $(۱+ب) مس (ط-ذ) = (۱-ب) مس (ط+ذ)$ سے $ط$ مساوی کرو۔
 $۱۰ جم ۲ ذ + ب جم ۲ ط = ج$

(۳) ثابت کرو کہ

(95)

$(۱ جب ذ + ب جم ذ) (۱ جب پ + ب جم پ) جب (ذ - پ)$

$+ (۱ جب پ + ب جم پ) (۱ جب ط + ب جم ط) جب (پ - ط)$

$+ (۱ جب ط + ب جم ط) (۱ جب ذ + ب جم ذ) جب (ط - ذ)$

$+ (۱+ب) جب (ذ-پ) جب (پ-ط) جب (ط-ذ) = ۰$

اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۴) مساوات $جم ط - جم ع = ۲ جم ط (جم ط - جم ع) - ۲ جب ط (جب ط - جب ع)$

کو سادہ ترین شکل میں تحویل کرو اور اس کو حل کرو۔

(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں ۱ ، $ب$ ، $ج$ کا مجموعہ ۹۰ سے کم ہے جبکہ یہ

زاویے رشتہ $جم ۱ + جم ب + جم ج = ۱۸۰$ کو پورا کرتے ہوں۔

(۶) اگر $۱+ب+ج = ۹۰$ تو ثابت کرو کہ $مس ۱ + مس ب + مس ج$ کی

کم سے کم قیمت ایک ہے۔

(۷) مساواتوں

$جب ط + جب ذ + جب ع = جم ط + جم ذ + جم ع$

$ط + ذ = ۲ع$

سے $ط$ اور $ذ$ معلوم کرو۔

(۸) اگر $۱+ب+ج = ۱۸۰$ تو ثابت کرو کہ

$۸ جب ۱/۲ | جب ۱/۲ | ب جب ۱/۲ | ج ۱/۲ |$

(۹) اگر

$$\frac{\text{لا جب ط} + \text{ا جب ذ} + \text{ی جب پ}}{\text{لا جم ط} + \text{ا جم ذ} + \text{ی جم پ}} = \frac{\text{م جب ط جب ذ جب پ} + \text{جب (ط} + \text{ذ} + \text{پ)}}{\text{م جم ط جم ذ جم پ} - \text{جم (ط} + \text{ذ} + \text{پ)}}$$

$$\frac{\text{لا جب } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{ا جب } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{ی جب } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})}{\text{لا جم } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{ا جم } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{ی جم } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})}$$

$$\frac{\text{م جب } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{جب } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{ا جب } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})}{\text{م جم } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})} =$$

$$(۱۰) \text{ ثابت کرد کہ } \frac{\text{ح جب ۳ ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \text{جب (ع} + \text{ب} + \text{ج)}$$

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

$$\frac{\text{ح جب ن ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \{ \text{جب (ف} + \text{ع} + \text{ق} + \text{ب} + \text{ج}) \}$$

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

$$۱. \text{ جم ع جم ب} + ۱ (\text{جب ع} + \text{جب ب}) + ۱ = ۰$$

$$۲. \text{ جم ع جم ج} + ۱ (\text{جب ع} + \text{جب ج}) + ۱ = ۰$$

تو ثابت کرد کہ

$$۱. \text{ جم ب جم ج} + ۱ (\text{جب ب} + \text{جب ج}) + ۱ = ۰$$

جہاں ب، ج کم ہیں ۳ سے۔

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط، ط ہوں جو مساوات

$$1 = \frac{\text{جم ط جب فہ}}{\text{جم ط}} + \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب ط}} = 0$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط اور ط دج کے جگہ
تو وہ مساوات کو پورا کرینگے۔

(96)

(۱۳) اگر

$$\begin{aligned} & \text{ا. جم ط. جم. ب جب ط. جب ب. ج. ا. جم ب. جم ج. ب جب ب. جب ج. ج.} \\ & \text{ا. جم ب. جم ج. ب جب ب. جب ج. ج. ا. جم ج. جم ج. ب جب ج. جب ج. ج.} \\ & \text{اور ا. جم ج. جم ج. ب جب ج. جب ج. ج.} \end{aligned}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}}\right) \left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}}\right) \left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}}\right) = \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ج}}$$

جہاں زاویے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲۲ کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

$$\text{جب (ط + ط) = جب (ف + ف) = جب ب}$$

$$\text{اور ا. جب (ط + ف) + ب جب (ط - ف) = ج}$$

تو ثابت کرو کہ یا

$$\text{ا. جب (ط ± ط) = ج، یا ا. جب ط ± ب جب ب = ج}$$

$$(۱۵) \text{ اگر مساوات } \text{جب } \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}} = \text{جب } \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ج}} = 1$$

درست رہے جبکہ ن = اتو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱۶) مساواتوں

$$۴ (جم عہ جم ط + جم ذ) = (جم عہ جب ط + جب ذ)$$

$$= ۴ (جم عہ جم ط + جم پ) = (جم عہ جب ط + جب پ) = (جم ذ - جم پ) (جب ذ - جب پ)$$

سے ط ساقط کرو، اور ثنابت کرو کہ جم (ذ - پ) = ۱، یا جم ۲ عہ

$$(۱۷) اگر \frac{مس ا}{مس ب} = \frac{جب (لا - عہ)}{جب عہ} اور \frac{مس ما}{مس با} = \frac{جب (لا - ۲ عہ)}{جب ۲ عہ}$$

$$تو ثنابت کرو کہ \frac{مس ما}{جب ۲ عہ} = \frac{جب لا}{جب ۲ عہ} = \frac{جم لا}{جم ۲ عہ - جم ۲ عہ}$$

(۱۸) اگر عہ، ب، ج، غیر مساوی ہوں اور ہر ایک ۳ سے کم تو ثنابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

$$\frac{جب (۲ - ب - ج - عہ)}{جم (۲ + ج + عہ + ب)} = \frac{جب (۲ - ب - ج - عہ)}{جم (۲ + ج + عہ + ب)} = \frac{جب (۲ - ب - ج - عہ)}{جم (۲ + ج + عہ + ب)}$$

ایک واحد مساوات

$$جم ۲ (ب + ج + عہ) + جم ۲ (ج + عہ + ب) + جم ۲ (عہ + ب + ج) = ۰$$

کے مماثل ہے۔

$$(۱۹) اگر لا = ۲ جم (ب - ج) + جم (ط + عہ) + جم (ط - عہ)$$

$$= ۲ جم (ج - عہ) + جم (ط + ب) + جم (ط - ب)$$

$$= - ۲ جم (عہ - ب) - جم (ط + ج) - جم (ط - ج)$$

تو ثنابت کرو کہ لا = جب ط اگر زاویوں عہ، ب، ج میں سے کسی دو کا فرق نہ معدوم ہو اور نہ ۳ کے کسی ضعیف کے مساوی ہو۔

$$(۲۰) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰ اور اگر$$

$$\text{جیب } (1 + n^2) \mid \text{جیب } (b - c) = 0$$

جہاں n ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جیب } (n - 1) \mid \text{جیب } (1 + n) (b - c) = 0$$

$$(21) \text{ اگر } \frac{1}{p} (e + b) (e + c) - (e + c) - (e + c) = 0$$

$$+ \frac{1}{p} (e + c) (e + b) - (e + c) - (e + c) = 0$$

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{p} (e + b) (e + c) - (e + c) - (e + c) = 0$$

$$+ \frac{1}{p} (e + c) (e + b) - (e + c) - (e + c) = 0$$

$$(22) \text{ اگر } \frac{\text{جیب } (e + b)}{\text{جیب } (e + c)} = \frac{\text{جیب } (b + c)}{\text{جیب } (e + c)} = \frac{\text{جیب } (e + c)}{\text{جیب } (e + c)}$$

تو ثابت کرو کہ یا تو e اور b میں $\frac{1}{p}$ کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا b اور c میں π کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

$$(23) \text{ اگر } (e + b) + (b + c) + (c + e) = 0$$

$$(e + b) + (b + c) + (c + e) = 0$$

$$(e + b) + (b + c) + (c + e) = 0$$

اور اگر e ، b ، c سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

$$(24) \text{ اگر } \frac{\text{جیب } (e + b)}{\text{جیب } (e + c)} = \frac{\text{جیب } (b + c)}{\text{جیب } (e + c)}$$

اور ب، ج غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$\frac{\text{جم (ب + ج + ط)}}{\text{جب (ب + ج + ط)}} =$$

$$\text{اور جم ط} = \frac{\text{جب (ب + ج + ط) جب (ج + ط) جب (ط + ب)}}{\text{جم (ب + ج + ط) جم (ج + ط) جم (ط + ب) جم (ب + ج + ط)}}$$

(۲۵) اگر ا، ب، ج ثابت زاویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰° ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} < ۱ \text{ اور } \frac{۳}{۴}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$۶۲ \text{ جب ط} + \text{جب ط} = ۰$$

(۲۷) اگر ۲ س = لا + ما + ی تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس (س - لا) + مس (س - ما) + مس (س - ی) = مس س}$$

$$= \frac{\text{م جب لا جب ما جب ی}}{\text{۱ - جم لا - جم ما - جم ی - ۲ جم لا جم ما جم ی}}$$

نیز مس (س - لا) + مس (س - ما) + مس (س - ی) = مس س

$$= \frac{۱۶ لا ی}{(لا + ما + ی + ۲ - ۲(ما + ی + لا + ی + ۲))}$$

$$(۲۸) \text{ اگر } \frac{\text{جم ط}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جم ف}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ف}}{\text{جب ب}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$۰ = ۱ + \frac{\text{جب ط جب ف}}{\text{جب ب}} + \frac{\text{جم ط جم ف}}{\text{جم ب}}$$

(۲۹) اگر ۲ جب $ع$ $ج$ $(ط + ف) = ۲$ $ج$ $(ط - ف) + ج$ $ع$ ،

اور ۲ جب $ع$ $ج$ $(ط + پ) = ۲$ $ج$ $(ط - پ) + ج$ $ع$ ،
تو ثابت کرو کہ ۲ جب $ع$ $ج$ $(ف + پ) = ۲$ $ج$ $(ف - پ) + ج$ $ع$ ،

(۳۰) اگر $ج$ $(ا - ی) + ج$ $(ی - لا) + ج$ $(لا - ا) = - \frac{۳}{۴}$

تو $ط$ کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$ج$ $(لا + ط) + ج$ $(ا + ط) + ج$ $(ی + ط) - ۳$ $ج$ $(لا + ط) + ج$ $(ا + ط) + ج$ $(ی + ط) = ۰$

(۳۱) اگر

$$\frac{ج (۲ + ا) ل}{ن} = \frac{ج (۱ + ا) م}{م} = \frac{ج ا ل}{ل}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ج (۲ + ا) ل}{۲ م - (ن + ل) ن} = \frac{ج (۱ + ا) م}{م (ن - ل)} = \frac{ج ا ل}{۲ م - (ن + ل) ن}$$

(۳۲) ثابت کرو کہ مساواتیں

$$، (لا + \frac{۱}{لا}) جب ع = \frac{ا}{ی} + \frac{ی}{ا} + ج ع ،$$

$$، (ا + \frac{۱}{ا}) جب ع = \frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا} + ج ع ،$$

$$(ی + \frac{۱}{ی}) جب ع = \frac{لا}{ا} + \frac{ا}{لا} + ج ع$$

غیر تابع نہیں ہیں اور وہ

$$لا + ا + ی = \frac{۱}{ی} + \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{لا} = - جب ع$$

کے مثال ہیں -

۳۳ - ثابت کرو کہ جملہ

۲ جم (ب-ج) جم (ط+ب) جم (ط+ج) جم (ج-ع) جم (ط+ج) جم (ط+ج) جم
 ۲+ جم (ع-ب) جم (ط+ع) جم (ط+ب) جم (ط+ع) جم (ط+ب) جم (ط+ج) جم (ط+ج) جم
 ط پر منحصر نہیں ہے، اس کی قیمت جیوب التمام کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرو۔
 (۳۴) اگر مساوات

مس (ط + $\frac{1}{\pi}$) = ۳ مس ۳ ط
کے چار حل ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳

$$\begin{cases} \pi \frac{2}{3} = \text{جبا} \\ \pi \frac{1}{3} = \text{حم} \end{cases}$$

(۳۷) ثابت کرو کہ مسلسل کسر

..... $\frac{1}{2 \text{ مس عم}} + \frac{1}{2 \text{ مس عم}} + \frac{1}{2 \text{ مس عم}}$

کان واں مستحق ہے

$$\frac{(مسء + قطع) - (مسء - قطع)}{(مسء + قطع) - (مسء - قطع)}$$

(۳۸) مساواتوں

$$\begin{cases} 3 \text{ جم ط} + 1 \text{ جم س ط} = 14 \\ 2 \text{ جب ط} - 1 \text{ جب س ط} = 6 \end{cases}$$

سے ط ساقط کرو۔

(۲۹)

$$\frac{\text{مس (پہ-ط)}}{ر} = \frac{\text{مس (ذہ-ط)}}{ق} = \frac{\text{مس (طہ-ط)}}{ف} \quad \text{اگر}$$

توثابت کرو کہ

$$ف (ق-ر) : جم (ذہ-پہ) + ق (ر-ف) : جم (پہ-ط) + ر (ف-ق) : جم (طہ-ذہ) = ۰$$

$$(۳۰) \quad \frac{۱}{۱ + ر : جم ط + ب جب ط} \quad \text{کو اس شکل}$$

$$۱ + ۱ : جم (طہ-ط) + ۱ : جم (طہ-ط) + ۱ : جم (طہ-ط) + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

$$(۳۱) \quad \text{مس ۳ ط - مس ۲ ط - مس ط = ۰ کو حل کرو۔}$$

(۳۲) اگر

$$جم لا + جم ما = جم ۳ ط + جب لا + جب ما = جب ۳ ط اور لا + ما = ۲ :$$

توثابت کرو کہ

$$۸ جب ۳ ط (۳ + ۲) = ۲ : جب ۲ : جب ۳ ط (۳ + ۲) (بر)$$

$$(۳۳) \quad \text{اگر } ۱ : جم ذہ : جم پہ + ب جب ذہ : جب پہ = ج$$

$$۱ : جم پہ : جم ط + ب جب پہ : جب ط = ج$$

$$۱ : جم ط : جم ذہ + ب جب ط : جب ذہ = ج$$

$$\text{توثابت کرو کہ } ب ج + ج + ج + ۱ + ۱ : ب = ۰ \quad \text{الا آنکہ } ۱ : ب = ج$$

(۳۴) حل کرو مساوات

$$\pi \frac{۳}{۲} = (-\frac{۱}{۲} - لا) : جم لا + جم لا + (-\frac{۱}{۲} + لا) : جم$$

(۳۵) مساواتوں

$$\begin{aligned} ۳ا + جب ذ + ب + لا.حم ذ + و ب (۱ا جب ذ + ب) جم ذ = . \\ ۱ لا قط ذ - ب ما قم ذ = ۱ا - ب \end{aligned}$$

سے ذ سا قظ کرو۔

(۳۶) حل کرو مساوات

$$جم ۵ ط + جم ۵ ط + جم ۱۰ ط = \frac{۱}{۲}$$

(۳۷) مساواتوں

$$\begin{aligned} ۱ا.جم ط.جم ۲ ط = ۲ (۱ا.جم ط - لا) \\ ۱ا.جب ط.جب ۲ ط = ۲ (۱ا.جب ط - ما) \end{aligned}$$

سے ط سا قظ کرو۔

(۳۸) ثبات کرو کہ مساوات $۳ا + ما = ن$ (جہاں $ن$ صحیح عدد ہے) کے حل ثابت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

$$\left[\frac{\pi (۱ + ۲ن) \frac{۱}{۲} جم}{\pi \frac{۱}{۲} جم} (۱ - ۲ + ۲ + ۱) \right] \frac{۱}{۳}$$

(۳۹) حل کرو مساوات

$$۴.جم ۳ ط - جب ۳ ط - ۱۰.جم ۲ ط + ۵.جب ۲ ط + ۲۲.جم ط - ۵.جب ط = ۱۰$$

$$\frac{قم ۲ ط - مس ۲ ط}{جم ۲ ط + مس ۲ ط - ۱} \quad (۵۰)$$

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(۵۱) ثبات کرو کہ کسر مسلسل (100)

$$\begin{aligned} & \frac{قط ۱}{-۲} \frac{قط ۲}{-۲} \frac{قط ۳}{-۲} \\ & \frac{جب ۲ (۱ + ۲) جم ۲}{-۲} = \end{aligned}$$

..... ر خارج قسمتوں تک

(۵۲) مساواتوں

$$\begin{aligned} ۱ \text{ جب } (ط - ع) + ب \text{ جب } (ط + ع) &= \text{لا جب } (ف + ب) + \text{ما جب } (ف - ب) \\ ۱ \text{ جم } (ط - ع) - ب \text{ جم } (ط + ع) &= \text{لا جم } (ف + ب) - \text{ما جم } (ف - ب) \\ ط &\pm ف = ب \end{aligned}$$

سے ط، ف ساقط کرو۔

(۵۳) ثنابت کرو کہ

$$\begin{aligned} ۲ \text{ جم } ع &= (۱ \text{ جم } ۳ ب - ۱ \text{ جم } ۳ ج) \\ ۴ &= (۲ \text{ جم } ب - ۲ \text{ جم } ج) + (۱ \text{ جم } ع - ۱ \text{ جم } ب) + (۱ \text{ جم } ع + ۱ \text{ جم } ب - ۱ \text{ جم } ج) \end{aligned}$$

$$(۵۴) \text{ اگر } ۱ \text{ جم } ع + ب \text{ جم } ب + ج \text{ جم } ج = ۰$$

$$۱ \text{ جب } ع + ب \text{ جب } ب + ج \text{ جب } ج = ۰$$

$$۱ \text{ قط } ع + ب \text{ قط } ب + ج \text{ قط } ج = ۰$$

$$۱ \pm ۲ \pm ۳ \pm ۴ = ۰ \text{ ثنابت کرو کہ بالعموم}$$

(۵۵) مساواتوں

$$۱ \text{ جب } ۳ (ط + ۲) + ۲ \text{ جب } ۳ (ط + ۲) = ۲$$

$$۱ \text{ جب } ۳ (ط - ۲) + ۲ \text{ جب } ۳ (ط - ۲) = ۲$$

سے ط ساقط کرو۔

$$(۵۶) \text{ اگر مساوات } ۱ \text{ مس } (ط + ع) = ۲ \text{ مس } ط$$

کو پورا کر نیوالی ط کی قیمتیں ط، ط، ط ہوں اور ان میں سے کسی دو میں ۲ کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثنابت کرو کہ

$$ط + ط + ط + ع$$

۲ کا ایک ضعف ہے۔

(۶۲) اگر $\text{مس} ۲ \text{ ط} = \text{ط} ۲ \text{ مس} = \text{ف} ۲ \text{ ف} - \text{مس} \text{ ف} = \text{مس} ۲ \text{ پ} - \text{مس} \text{ پ}$
 تو ثابت کرو کہ $\text{ط} + \text{ف} + \text{پ} = \frac{1}{2} \pi$ کا ایک طاق ضعیف ہے بشرطیکہ $\text{مس} \text{ ط}$ ،
 $\text{مس} \text{ ف}$ ، $\text{مس} \text{ پ}$ سب غیر مساوی ہوں۔

(۶۳) اگر $\text{لاجم عد} + \text{ماجب عد} + \text{ی} + \text{جم ۲ عد} = ۰$ ،

لا. حم به + ما جب به + ی + حم ۲ به = ۰.

لا. حمید + صاحبہ + ی + حم ۲ جہ = ۰،

تو ثابت کرو کہ

لا. حم فہ + ما جب فہ + ی + حم ۲ فہ

$$= 8 \text{ جب } \frac{1}{p} (ع + ب + ج + ف) \text{ جب } \frac{1}{p} (ف - ع) \text{ جب } \frac{1}{p} (ف - ب) \text{ جب } \frac{1}{p} (ف - ج)$$

(۶۸) ثنابت کرو کہ

$$3 \text{ جم } ۲ (ب + ج - ع) \text{ جب } (ب - ج - ع) \text{ جم } ع$$

$$= ۸ \text{ جب } (ب - ج - ع) \text{ جب } (ج - ع - ب) \text{ جب } (ع - ب - ج) \text{ جم } ع$$

$$(۶۹) \text{ اگر } ۱ \text{ جب } ط + ب \text{ جم } ط = ۱ \text{ قم } ط + ب \text{ ق ط } ط$$

تو ثنابت کرو کہ مساوات کا ہر رکن

$$= (۱ - \frac{1}{4} ب - \frac{1}{4} ج) (\frac{1}{4} ب + \frac{1}{4} ج) =$$

$$(۷۰) \text{ جب } (ب - ج - ع) + \text{ جب } (ج - ع - ب) + \text{ جب } (ع - ب - ج) \text{ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔}$$

۱ حل کرو مساوات (102)

$$\text{جم } (لا - ل) \text{ جم } (لا - ب) \text{ جم } (لا - ج)$$

$$= \text{جب } ۱ \text{ جب } ب \text{ جب } ج \text{ جب } لا + \text{جم } ۱ \text{ جم } ب \text{ جم } ج \text{ جم } لا$$

۱ حل کرو مساوات (۷۲)

$$\text{جم } ۲ لا + \text{جم } ۲ (لا - ل) + \text{جم } ۲ (لا - ب) + \text{جم } ۲ (لا - ج) = ۲ \text{ جم } ۱ \text{ جم } ب \text{ جم } ج$$

۱ حل کرو مساوات (۷۳)

$$\text{جب } ۳ ۱ + \text{جب } ۲ ۱ = \text{جب } ۱ ۱ (\text{جب } ۳ ۱ + \text{جب } ۲ ۱)$$

۱ مساواتوں (۷۴)

$$۱ \text{ جم } ۲ ط + ب \text{ جب } ۲ ط = ج$$

$$۱ \text{ جم } ۳ ط + ب \text{ جب } ۳ ط = .$$

سے ط ساقط کرو۔

$$(۷۵) \text{ اگر } ۱ + ب + ج = ۱۸۰ \text{ تو ثنابت کرو کہ}$$

$$\frac{1}{4} ب \text{ جب } \frac{1}{4} ج + \frac{1}{4} ج \text{ جب } \frac{1}{4} ب + \frac{1}{4} ب \text{ جب } \frac{1}{4} ج + \frac{1}{4} ج \text{ جب } \frac{1}{4} ب$$

$$\frac{1}{4} (ب + ج + ب + ج + ب + ج)$$

(۷۶) مساواتوں

$$۵۴ = ۵۱ + ۵۲ - ۵۳$$

$$۵۴ = ۵۱ + ۵۲ - ۵۳$$

سے ط ساقط کرو۔

(۷۷) اگر ۲ جب $(۲ - ۳)$ قط $(۲ + ۳)$

$$= ۲ \text{ جب } (۲ - ۳) \text{ قط } (۲ + ۳) = ۲ \text{ جب } (۲ - ۳) \text{ قط } (۲ + ۳)$$

تو ثابت کرو کہ

$$۰ = ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ = ۰$$

$$۰ = ۲ \text{ جب } (۲ + ۳) + ۲ \text{ جب } (۳ + ۴) + ۲ \text{ جب } (۴ + ۵) = ۰$$

(۷۸) ثابت کرو کہ

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = \sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{p=1}^{\infty} p = \sum_{q=1}^{\infty} q = \dots$$

$$\dots = \sum_{p=1}^{\infty} p = \sum_{q=1}^{\infty} q = \sum_{r=1}^{\infty} r = \sum_{s=1}^{\infty} s = \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{p=1}^{\infty} p = \sum_{q=1}^{\infty} q = \sum_{r=1}^{\infty} r = \sum_{s=1}^{\infty} s = \dots$$

اسلئے ۹ تا ۹۳ کے حسب ذیل سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو:-

$$(۷۹) ۱ \text{ جب } ۱ + ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ \text{ جب } ۳ + \dots + ۱ \text{ جب } ۱$$

$$(۸۰) ۱ \text{ جب } ۱ + ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ \text{ جب } ۳ + \dots + ۱ \text{ جب } ۱$$

$$(۸۱) ۱ \text{ جب } ۱ + ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ \text{ جب } ۳ + \dots + ۱ \text{ جب } ۱$$

$$+ \dots + \{ ۱ - (۱ - ۲) \} \text{ جب } (۱ - ۲) + \dots$$

(۸۲) جب لا جب ۲ لا جب ۳ لا + جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۳ لا جب ۳ لا +

+ جب ن لا جب (ن+۱) لا جب (ن+۲) لا

(۸۳) جب $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ اور $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ہو تو

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

$$(۸۴) \text{ مس ط مس } ۳ \text{ ط } + \text{ مس } ۲ \text{ ط مس } ۲ \text{ ط } + \dots + \text{ مس } ن \text{ ط مس } (ن + ۲) \text{ ط}$$

$$(103) \quad (15) \text{ مس } \text{ط} \text{ق} \text{ط} \text{ط} + \text{مس } \text{ط} \text{ق} \text{ط} \text{ط} + \dots + \text{مس } \text{ط} \text{ق} \text{ط} \text{ط} + \text{مس } \text{ط} \text{ق} \text{ط} \text{ط}$$

$$(۸۶) \text{ مس } ۱ + \frac{۱}{۲} \text{ مس } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \text{ مس } \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۲^{n-1}} \text{ مس } \frac{۱}{۲^{n-1}}$$

(۸۷) مس لاقط^۲ ل + $\frac{1}{x}$ مس $\frac{ل}{p}$ قظ^۲ $\frac{ل}{p}$ + $\frac{1}{p}$ مس $\frac{ل}{p}$ قظ^۲ $\frac{ل}{p}$ + ...

$$+ \frac{1}{1-\psi} \text{ مس } \frac{\psi}{1-\psi} \text{ قط } \frac{\psi}{1-\psi}$$

(۸۸) $1 + \text{ج} \text{ جم } \text{ط} \text{ جم } \text{ف} + \text{ج}^2 \text{ جم } \text{ط} \text{ جم } \text{ف} + \text{ج}^3 \text{ جم } \text{ط} \text{ جم } \text{ف} + \dots + \text{ج}^n \text{ جم } \text{ط} \text{ جم } \text{ف} + \text{ج}^{n+1} \text{ جم } \text{ط} \text{ جم } \text{ف}$

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ جم } 2}{\text{جب } 2} + \dots + \frac{\frac{1}{8} \text{ جم } 8}{\text{جب } 8} + \frac{\frac{1}{4} \text{ جم } 4}{\text{جب } 4} + \frac{\frac{1}{2} \text{ جم } 2}{\text{جب } 2} \quad (89)$$

$$(9.) \frac{\text{جب ۱ ط}}{\text{جم ۱ ط} + \text{جم ۲ ط}} + \dots + \frac{\text{جب ۲ ط}}{\text{جم ۲ ط} + \text{جم ۳ ط}} + \frac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جم ۳ ط} + \text{جم ۴ ط}}$$

$$(91) \quad \frac{\text{م}^2 \text{ع}^2}{1 - \text{ج}^2 \text{ع}^2 \text{ق}^2 \text{ع}^2} + \frac{\text{م}^3 \text{ع}^3}{1 - \text{ج}^3 \text{ع}^3 \text{ق}^3 \text{ع}^3} + \dots + \frac{\text{ج}^n (1 + \text{ع}^n)}{1 - \text{ج}^n (1 + \text{ع}^n) \text{ق}^n \text{ع}^n}$$

$$\frac{\pi(1-n^2)}{n} \text{ جب } (1+n)(1-n) + \dots + \frac{\pi^3}{n} \text{ جب } 5 \times 3 + \frac{\pi}{n} \text{ جب } 3 \times 1 \text{ (۹۲)}$$

$$(93) \quad 3 \times 2 \text{ جب } 4 + 5 \times 2 \text{ جب } 2 + \dots + (n+2)(n+3) \text{ جب } n$$

(۹۴) اگر مساوات

• = جب (ط + ط) + جب (ط + ط) + جب (ع + ط)

کے دو حل ط، ط ہوں جہاں ط، ط، ع، ہ میں سے ہر ایک ۲ π سے کم ہے تو
ثابت کرو کہ

$$\text{جب } (\text{ط} + \text{ط}) + (\text{ط} + \text{ہ}) + (\text{ہ} + \text{ط}) = 0 \quad (۹۵) \text{۔ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{1}{2} \pi = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3}$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} \pi = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} - \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{3}$$

(۹۶) اگر ط کی چار غیر مساوی قیمتیں ع، ہ، ج، ض، ہر ایک ۲ π سے کم ہو اور وہ مساوی

$$\text{جسم } ۲ (ل - ط) + \text{جسم } (م - ط) + \text{جسم } ۲ = 0$$

کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ

$$\pi \text{ ن } ۲ = ل - م - ج + ض$$

$$\text{اور } \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi$$

$$\text{جب } (\text{ض} + \text{ع} + \text{ہ} + \text{ج} - \text{م} - \text{ل}) + \frac{1}{4} \pi = 0$$

ساتواں باب

ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ

۷۸۔ دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۴۰) میں اگر ہم جب ۱ کی بجائے اس کی قیمت (۱-جم ۱) لکھیں اور سلسلہ کو جم ۱ کی قوتوں میں ترتیب دیں تو جم ۱ کے لیے صرف جم ۱ کی قوتوں میں ایک جملہ حاصل ہوگا۔ ۱ کی بجائے ط رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } n ط = \text{جم } ط - \frac{n(n-1)}{2} \text{جم } ط^2 - (1-\text{جم } ط) + \dots$$

$$+ (1-) \frac{n(n-1) \dots (1-2n) \dots (1-2n-1)}{2} \text{جم } ط^2 - (1-\text{جم } ط) + \dots$$

اس سلسلہ میں (۱-) جم ۱ ط کا سر ہے

$$\frac{n(n-1) \dots (1-2n) \dots (1-2n-1)}{2} + \frac{n(n-1) \dots (1-2n) \dots (1-2n-1)}{2} (1+)$$

$$+ \dots + \frac{(2+)(1+)}{2} \times \frac{n(n-1) \dots (1-2n) \dots (1-2n-1)}{2} +$$

یہ سر (۱+ لا) اور (۱- لا) کے حاصل ضرب میں لا کا جو

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے ؟
اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو $(1 + \frac{1}{r})^{n-1} - (\frac{1}{r})^{n-1}$ کے
پھیلاؤ میں لا کا ہے۔ یہ آخری سر

$$+ (1+r)(r^2-n)+r \} \frac{(1+r^2-n) \dots (1-r-n)}{1} =$$

$$\{ \dots + (2+r) \frac{(1-r^2-n)(r^2-n)}{2} \}$$

(105)

اور یہ

$$\{ \frac{1-r^2-n}{(1+r)} + \frac{r^2-n}{(1+r)} \} \frac{(1+r^2-n) \dots (1-r-n)}{1} =$$

$$= \frac{n(1-r-n) \dots (1+r^2-n)}{1}$$

جم ط کا سر $\frac{1}{r} \{ (1+r) + (1-r) \} =$ یعنی $\frac{1}{r}$ حاصل ہوتا ہے۔ جم ط

کا سر $(1+r) \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})^{n-1}$ کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں
لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے $(1+r) \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})^{n-1}$ یا

$$n \times \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})^{n-1}$$

پس

$$\text{جم } n \text{ ط} = \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})^{n-1} \text{ جم ط} + \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})^{n-1} \text{ جم ط} + \dots (1)$$

اس کی عام رقم ہے
(1) $\frac{n(1-r-n) \dots (1+r^2-n)}{1}$ جم ط

اسی طرح دند ۵ کے ضابطہ (۳۹) سے ہمیں سلسلہ ملتا ہے

$$\text{جب } \frac{1-2}{1} = \frac{1-2}{1} \text{ جم } 1-2 \text{ ط } - \frac{2-3}{1} \text{ ط } - \frac{3-4}{1} \text{ ط } - \frac{4-5}{1} \text{ ط } - \dots$$

$$+ \frac{(2-3)(3-4)}{2} \text{ ط } - \frac{(3-4)(4-5)}{3} \text{ ط } + \dots (2)$$

اور اس کی عام رقم ہے

$$(1) \frac{(1-2)(2-3) \dots (n-1)(n-2)}{1} \text{ جم } 1-2 \text{ ط } - \frac{(2-3)(3-4) \dots (n-2)(n-3)}{2} \text{ ط } + \dots$$

۹۔۔۔ اگر ضابطوں (۱) اور (۲) میں ط کو $\frac{1}{p}$ میں تبدیل کریں تو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(1) \frac{1}{p} \text{ جم } 1-2 \text{ ط } - \frac{2-3}{1} \text{ ط } - \frac{3-4}{1} \text{ ط } - \frac{4-5}{1} \text{ ط } - \dots$$

$$(3) \dots \dots \dots -$$

$$(1) \frac{1}{p} \text{ جب } 1-2 \text{ ط } = \frac{1-2}{1} \text{ ط } - \frac{2-3}{1} \text{ ط } - \frac{3-4}{1} \text{ ط } - \frac{4-5}{1} \text{ ط } - \dots$$

$$+ \frac{(2-3)(3-4)}{2} \text{ ط } - \frac{(3-4)(4-5)}{3} \text{ ط } + \dots (2)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(1) \frac{1}{p} \text{ جب } 1-2 \text{ ط } = \frac{1-2}{1} \text{ ط } - \frac{2-3}{1} \text{ ط } - \frac{3-4}{1} \text{ ط } - \frac{4-5}{1} \text{ ط } - \dots$$

$$+ \frac{(2-3)(3-4)}{2} \text{ ط } - \frac{(3-4)(4-5)}{3} \text{ ط } + \dots (5)$$

$$(1) \frac{1}{p} \text{ جم } 1-2 \text{ ط } = \frac{1-2}{1} \text{ ط } - \frac{2-3}{1} \text{ ط } - \frac{3-4}{1} \text{ ط } - \frac{4-5}{1} \text{ ط } - \dots$$

$$+ \frac{(2-3)(3-4)}{2} \text{ ط } - \frac{(3-4)(4-5)}{3} \text{ ط } + \dots (1)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰۔ — جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم ان جیبہ سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُلٹی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (1 - \text{جب ط}) \frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{2} - \frac{1}{4} \text{جب ط}^2$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن})}{24} - \frac{1}{8} \text{جب ط}^4 - \dots$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱۔ جب ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = 1 - \left\{ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{2} + \frac{\text{ن}^3}{4} \right\} + \left\{ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن})}{24} + \frac{\text{ن}^5}{80} \right\} - \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن})}{24} - \dots$$

اس پھیلاؤ میں (۱۔) جب ط کا سر ہے

$$\frac{1}{4} \text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن}) + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن}) (4 - \text{ن})}{24} + \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن}) (4 - \text{ن}) (5 - \text{ن})}{120} + \dots$$

جس کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{(1-s)} \times \frac{(1-s)^n (2-s)^{n-1} \dots (n-s)^{n-1}}{(1-s^2) \dots (1-s^{2n})}$$

$$+ s \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots$$

$$+ \frac{s}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots$$

اب دائرہ مانڈ کا مسئلہ ہے

(107)

$$(f+q) = f + s + f + s + \dots + \frac{s(1-s)}{(1-s)} + \dots$$

جس میں f ، $f(1-s)$ ، \dots ، $(f-s+s)$ کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ مسئلہ

f اور q کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ $f = \frac{1-s^2}{1-s}$ ،

$q = \frac{1-s}{1-s^2}$ ، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے

ہیں کہ $(1-s)$ جب s^2 ط کا سر ہے

$$\frac{1}{(1-s)} \times \frac{(1-s)^n (2-s)^{n-1} \dots (n-s)^{n-1}}{(1-s^2) \dots (1-s^{2n})}$$

$$\frac{(1-s)^n (2-s)^{n-1} \dots (n-s)^{n-1}}{(1-s^2) \dots (1-s^{2n})}$$

۱۔ دیکھو آئینہ کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب 'ن جفت ہو تو

$$\text{جم } n \text{ ط} = 1 - \frac{n}{2} \text{ جب } \text{ط} + \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } \text{ط} \dots$$

$$+ (-1)^s \frac{n(n-2) \dots (n-2s+2)}{2^s} \text{ جب } \text{ط} + \dots + (-1)^s$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے۔

۸۱- نیز

$$\text{جب } n \text{ ط} = \text{جم } \text{ط} (n-1) \text{ جب } \text{ط} - \frac{n(n-2) \dots (n-2s+2)}{2^s} \text{ جب } \text{ط} + \dots + (-1)^s \text{ جب } \text{ط} + \dots$$

فرض کرو کہ ن جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب ط کی قوتوں میں پھیلاد تو ہمیں

(۱-)^s جم ط جب س-۱ ط کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{(1-s)} \frac{(2-s) \dots (2-s+2s)}{(1-s) \dots (1-s)} + \frac{(1-s)}{(1-s)} \frac{(1-s)}{(1-s)} + \dots + \frac{(1-s)}{(1-s)} \frac{(1-s)}{(1-s)}$$

$$\left\{ \dots + \frac{(1-s)}{(1-s)} \frac{(1-s)}{(1-s)} + \dots \right\}$$

جو

$$\frac{(2-s) \dots (2-s+2s)}{(1-s) \dots (1-s)} \times \frac{1}{(1-s)} = \dots + \frac{(1-s)}{(1-s)} \frac{(1-s)}{(1-s)} + \dots$$

$$\frac{n(n-2) \dots (n-2s+2)}{2^s} = \dots + \frac{(1-s)}{(1-s)} \frac{(1-s)}{(1-s)} + \dots$$

(108)

پس ن جفت ہونے کی صورت میں

$$\text{جب } n \text{ ط} = \text{جم } \text{ط} - \frac{n}{2} \text{ جب } \text{ط} - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } \text{ط} + \dots$$

$$+ (-1)^s \frac{n(n-2) \dots (n-2s+2)}{2^s} \text{ جب } \text{ط} + \dots$$

۸۲۔ جب n طاق ہو تو

$$\text{جم } n \text{ ط} = \text{جم } ط (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) - \frac{n(n-1)}{2} (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-3) \text{ جب } ط$$

$$+ \dots + \{$$

$$\text{اور جب } n \text{ ط} = n (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) \text{ جب } ط$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2} (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-3) \text{ جب } ط + \dots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب $ط$ کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } n \text{ ط} \setminus \text{جم } ط = 1 - \frac{n-2}{2} \text{ جب } ط + \frac{(n-2)(n-4)}{2} \text{ جب } ط - \dots$$

$$+ \frac{(n-2)(n-4) \dots (n-2s+2)(n-2s)}{2^s} \text{ جب } ط + \dots$$

$$(9) \dots +$$

$$\text{اور جب } n \text{ ط} = \frac{n}{1} \text{ جب } ط - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } ط + \frac{n(n-2)(n-4)}{2^2} \text{ جب } ط$$

$$- \dots + \frac{n(n-2) \dots (n-2s+2)(n-2s)}{2^s} \text{ جب } ط - \dots$$

$$+ \dots (10) \dots$$

۸۳۔ اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں $ط$ کو $\frac{1}{3}$ - ط سے بدل دیا جا تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(1) \frac{1}{3} \text{ جم } n \text{ ط} = 1 - \frac{n}{3} \text{ جم } ط + \frac{n(n-2)}{3} \text{ جم } ط$$

$$- \frac{n(n-2)(n-4)}{3} \text{ جم } ط + \dots (11)$$

$$(1-)\frac{1}{2}^{100} \text{ جب } n \text{ ب } \text{جب } n = \frac{n}{1} \text{ جم } n - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جم } n$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \dots (12)$$

جبکہ ان خفت ہو، اور

$$(1) \frac{1}{r} (1-n) \text{ جب } n \text{ ط } \backslash \text{ جب } \text{ط} = 1 - \frac{n-1}{r} \text{ جم } \text{ط}$$

$$(13) \dots - b^2 \frac{(2-2)(2-2)}{2} +$$

اد

(109)

$$1 - \frac{(1-n)^n}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n} = 1$$

$$(12) \dots - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \dots$$

جبکہ ن طاق ہو۔ یہ سب ضابطے وہی ہیں جو دفعات ۷، ۸ اور ۹ میں حاصل کئے گئے تھے۔

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۸۴ — اگر ہم ضابطوں (۱) تا (۶) میں یا ان کی مماثل شکلوں (۷) تا (۱۴) میں ط کی بجائے ط لکھیں تو ایسی مساداتیں ملتی ہیں جن سے جم ط یا جب ط دریافت ہو سکتا ہے جبکہ جم ط اور جب ط دیے گئے ہوں، ہم مختلف صورتوں پر غور کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ حجم ط دیا گیا ہے، تب اُسی مساوات سے جو (۱) سے حاصل کی گئی ہے جم $\frac{\pi}{6}$ کی قیمتیں لینگی۔ پس حجم ط دیا گیا ہے تو اُن تمام زاویوں کی جیب التمام معلوم ہونے کی امید رکھنی چاہیے جو $\frac{\pi}{6}$ تک $\frac{\pi}{n}$ ط

اس لیے اُس صورت میں صرف n قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب μ دیا گیا ہے، تب μ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے، اس مساوات سے μ کی n قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا مربع لینا اور جب μ کی بجائے μ^2 رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ μ $\frac{\pi}{n} + \pi$ (۱) سے μ کی n قیمتیں ہیں؛ اس طرح n درجہ کی ایک مساوات سے μ جب μ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب μ دیا گیا ہے، تب جب μ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے جو جب اس کے کہ n جفت یا طاق ہے۔ اگر n جفت ہے تو (۴) سے حاصل کردہ مساوات سے جب μ کی n قیمتیں ملتی ہیں، قیمتیں جب μ $\frac{\pi}{n} + \pi$ (۱) سے μ کی n قیمتیں ہوں گی۔ اگر n طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب μ کی n قیمتیں ملینگی جو جب μ $\frac{\pi}{n} + \pi$ (۱) سے μ کی n مختلف قیمتیں ہوں گی۔

مساواتوں کی اصولوں کے متشاکل تفاعل

۸۵ — ضابطہ (۱) کو μ میں n درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ μ $\frac{\pi}{n} + \pi$ دیا گیا ہو۔ اب چونکہ n زاویوں μ ، $\mu + \frac{\pi}{n}$ ، $\mu + \frac{2\pi}{n}$ ،، $\mu + \frac{(n-1)\pi}{n}$ میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے n گنے کی جیب اتمام μ کے مساوی ہے اور چونکہ μ ، $\mu + \frac{\pi}{n}$ ، $\mu + \frac{2\pi}{n}$ ،، $\mu + \frac{(n-1)\pi}{n}$ سب کے سب مختلف ہیں، وہ μ کی مساوات

(112)

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$\frac{\pi(1-n)^2}{n} + ط، \dots، \frac{\pi^2}{n} + ط، ط$$

میں سے دو دو کے قاطع التاموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ - $\frac{1}{n} \times \frac{\pi^2}{n}$ رقم $\frac{1}{n} ط$ ہے جہاں n ایک جفت عدد ہے۔

مساوات (۱) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے $n-2$ زاویوں کی جہوب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ان سب زاویوں کی جہوب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قسمت مطلوبہ مجموعہ ہے؟ یہ حاصل قسمت جب $ط$ کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اس رقم سے تقسیم کیا جائے جس میں جب $ط$ شامل نہیں ہوتا یعنی

$$\frac{\frac{\pi^2}{n}}{\frac{\pi(1-n)^2}{n}} = \text{مطلوبہ مجموعہ}$$

$$= \frac{\frac{\pi^2}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{n} ط$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\frac{19}{14} = \pi \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{2}{4} + \pi \cdot \frac{3}{4} + \pi \cdot \frac{4}{4}$$

$$\text{اور } 1120 = \pi \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{2}{4} + \pi \cdot \frac{3}{4} + \pi \cdot \frac{4}{4}$$

اگر جب $ط$ جب $ط$ کو جم $ط$ کی رقم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اس آٹھویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے سے جم $ط$ کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\pi \cdot \frac{1}{4}، \pi \cdot \frac{2}{4}، \dots، \pi \cdot \frac{4}{4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم } \frac{1}{4} \pi = \text{جم } \frac{1}{4} \pi - \text{جم } \frac{1}{4} \pi = \text{جم } \frac{1}{4} \pi - \text{جم } \frac{1}{4} \pi = \dots$$

اس لیے مساوات مذکورہ بالا کی اصلیں ہیں

$$\pm \text{جم } \frac{1}{4} \pi \pm \text{جم } \frac{1}{4} \pi = \text{جم } \frac{1}{4} \pi \pm \text{جم } \frac{1}{4} \pi \pm \text{جم } \frac{1}{4} \pi$$

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :-

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

$$\text{جب } ۵ ط + \text{جم } ۴ ط + \text{جم } ۵ ط \text{ جب } ۴ ط = ۰$$

یا

$$(\text{جب } ۳ ط + \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط) (۲ \text{ جم } ۲ ط - ۱)$$

$$+ (\text{جم } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط - \text{جب } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط) (۲ \text{ جب } ۲ ط + \text{جم } ۲ ط) = ۰$$

جب ۳ ط، ۲ ط، وغیرہ کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرو اور جزو ضربی جب ط کو خارج کرد اور فرض کرو کہ لا = جم ط تو لا میں حسب ذیل چار درجہ مساوات حاصل ہوگی

$$\{ (۳ - لا) (۱ - لا) + (۲ - لا) (۳ - لا) + (۱ - لا) (۲ - لا) + (۱ - لا) (۳ - لا) \}$$

$$۰ = (۱ - لا) (۱ - لا) (۱ - لا) (۱ - لا) = ۰$$

$$یا (۱۶ - لا) (۱۲ - لا) (۱۰ - لا) (۸ - لا) + (۱۴ - لا) (۱۰ - لا) (۸ - لا) (۶ - لا) + (۱۲ - لا) (۸ - لا) (۶ - لا) (۴ - لا) = ۰$$

یا لا کی قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

$$۰ = ۱ + لا ۳۰ - لا ۲۴۰ + لا ۲۴۸ - لا ۲۵۹$$

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع $\frac{۲۴۸}{۲۵۹}$ ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضرب کا

$$\text{مجموعہ } \frac{۲۴۰}{۲۵۹} \text{ ہے، اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ} = \frac{۲۴۰ \times ۲۴۰ + ۲۴۰ \times ۲۵۹ + ۲۵۹ \times ۲۴۰}{۲(۲۵۹)}$$

$$= \frac{۱۹}{۱۹} = ۱۲۰ = ۲۴۰ \times ۲ - ۲۴۰ = \text{مجموعہ کے متکافوں کے مربعوں کا مجموعہ}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۵ ط + \text{جم } ۴ ط + \text{جم } ۵ ط = ۰$$

اس لیے $\text{جم } ۷ + \text{جم } ۱۳ = \text{جم } ۹ + \text{جم } ۵$ اس دو درجہ جی مساوات

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{p}}) - \frac{1}{q}$$

کی اصلیں ہیں۔ پس

$$\text{جم } ۷ + \text{جم } ۱۳ = \frac{1}{x} (-1 + \sqrt{1 + 12} + \sqrt{12 - 32})$$

اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{جم } ۳ + \text{جم } ۵ = \frac{1}{x} (-1 + \sqrt{12} + \sqrt{12 + 32})$$

اب $\text{جم } ۷ + \text{جم } ۱۳ = \frac{1}{p} (\text{جم } ۱۲ + \text{جم } ۱۴) = \frac{1}{p} (\text{جم } ۳ + \text{جم } ۵)$ اور
چونکہ ہم نے $\text{جم } ۷$ ، $\text{جم } ۱۳$ کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کر لیا ہے اس لیے ہم
ان میں سے ہر ایک کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ $\text{جم } ۷ < \text{جم } ۱۳$ ہمیں حال ہوتا ہے

$$\text{جم } ۷ = \frac{1}{14} \{ \sqrt{12 - 32} + 1 + \sqrt{12} + \sqrt{12 + 32} - \sqrt{12} - \sqrt{12 + 32} \}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{\pi}{14} = \frac{1}{p} (1 - \text{جم } ۷)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{12 - 32} - \sqrt{12} - \sqrt{12 + 32} + \sqrt{12} + \sqrt{12 + 32} - \sqrt{12} - \sqrt{12 + 32}}{\sqrt{12 - 32} + 1 + \sqrt{12} + \sqrt{12 + 32} - \sqrt{12} - \sqrt{12 + 32}}$$

(۵) ثابت کرو کہ لگرف (لا، ۱) ایک متجانس تفاعل ہوگا، ماکا جس کے البادان۔ اہیں تو

$$\frac{f(\text{جم } ۷, \text{جم } ۱۳)}{f(\text{جم } ۳, \text{جم } ۵)} = \frac{f(\text{جم } ۷, \text{جم } ۱۳)}{f(\text{جم } ۳, \text{جم } ۵)}$$

$$f(\text{جم } ۷, \text{جم } ۱۳)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{f(\text{جم } ۷, \text{جم } ۱۳)}{f(\text{جم } ۳, \text{جم } ۵)} = \frac{f(\text{جم } ۷, \text{جم } ۱۳)}{f(\text{جم } ۳, \text{جم } ۵)}$$

ہرمت نے اس مسئلہ کو اپنے *Sur l'Integration des Fonctions circulaires* میں بیان کیا ہے

باب۲۸۴ میں شائع ہوا تھا۔

اس میں حجم ط کی اعلیٰ ترین قوت $\frac{1}{2} \pi$ ۔ حجم ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{2} \pi = 1$ ؛
اس لیے

$$\text{حجم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi}{2}) (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi^3}{2}) \dots (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi(1-\pi)}{2})$$

اب حجم $\frac{\pi}{2} =$ حجم $\frac{\pi(1-\pi)}{2}$ ، اس لیے یہ جملہ لکھا جاسکتا ہے

$$\text{حجم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi}{2}) (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi^3}{2}) \dots (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi(1-\pi)}{2})$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{حجم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi}{2}) (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi^3}{2}) \dots (\text{حجم ط} - \text{حجم } \frac{\pi(1-\pi)}{2}) \quad (115)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جاسکتے ہیں

$$\text{حجم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi}{2}) (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi^3}{2}) \dots (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi(1-\pi)}{2})$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{حجم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi}{2}) (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi^3}{2}) \dots (\text{جب ط} - \text{جب } \frac{\pi(1-\pi)}{2})$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = ۰ رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں:-

$$(15) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \pi (1-\pi) \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi^3}{2} \dots \text{ جب } \frac{\pi(1-\pi)}{2} = 1 \\ \text{جبکہ ن طاق ہو، اور} \\ \frac{1}{2} \pi (1-\pi) \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi^3}{2} \dots \text{ جب } \frac{\pi(1-\pi)}{2} = 1 \end{array} \right.$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہذا المربع نکالنے میں مثبت علامت لگائی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حاوہ ہیں۔
 جم ن ط ÷ جم ط یا جم ن ط کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کو اگر جم
 (۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے متناظر حاصل ضرب کا مربع لیکر اس
 سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots (۱۶)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots (۱۷)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم ان مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :-

(116)

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots (۱۸)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{\text{جب ط}}{n}}\right) \dots (۱۹)$$

جبکہ ن جفت ہو =

۸۷ — دھما سبق کی طرح چونکہ جب ن ط \text{جب ط} جم ط
 میں ن - ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک

تناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جاسکتا ہے جو (اجزائے ضربی) حجم طہ میں خطی ہوں، اس صورت میں

$$\text{حجم } \frac{\pi}{n}، \text{ حجم } \frac{\pi^2}{n}، \dots، \text{ حجم } \frac{\pi(1-n)}{n}$$

حجم طہ کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب n طہ جب طہ صفر کے مساوی ہے۔ قیمتیں کبھی جاسکتی ہیں:

$$\pm \text{ حجم } \frac{\pi}{n}، \pm \text{ حجم } \frac{\pi^2}{n}، \dots$$

پس حسب سابق

جب n طہ جب طہ $= \frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi^2}{n})$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi(1-n)}{n})$ حجم طہ جبکہ n جفت ہو، اور

جب n طہ جب طہ $= \frac{\pi^2}{n}$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi}{n})$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi(1-n)}{n})$ حجم طہ جبکہ n طاق ہو۔

ان جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں:-

جب n طہ جب طہ $= \frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi^2}{n})$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi(1-n)}{n})$ حجم طہ جبکہ n جفت ہو، اور

جب n طہ جب طہ $= \frac{\pi^2}{n}$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi}{n})$ حجم طہ - حجم طہ $(\frac{\pi(1-n)}{n})$ حجم طہ جبکہ n طاق ہو۔

آئندہ باب میں ہم یہ دکھائیں گے کہ جب n طہ کی انتہاں ہے جبکہ طہ لا انتہا چھوٹا ہو، پس

$$\text{ماں } \frac{\pi^2}{4} = \text{ حجم } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n}، \dots، \dots، \dots (۱۸)$$

ہاں باب آخری جزو ضربی جب $\frac{\pi(1-n)}{n}$ یا جب $\frac{\pi(1-n)}{n}$ ہے بموجب اس کے کہ n جفت ہے یا طاق۔ پس

$$(19) \dots \left(\frac{\text{جب } 2\text{ط}}{\frac{\pi}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{n-2}} = 1 \quad \text{جب } n \text{ ط } = \text{جب } 2\text{ط} = 1$$

جبکہ n جفت ہو، اور

$$(20) \dots \left(\frac{\text{جب } 2\text{ط}}{\frac{\pi}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{n-1}} = 1 \quad \text{جب } n \text{ ط } = \text{جب } 2\text{ط} = 1$$

جبکہ n طاق ہو۔

۸۸۔۔۔۔۔ جملہ $\text{جب } n \text{ ط}$ ۔ $\text{جب } n$ نہ کو $\text{جب } 2\text{ط}$ کا n دیں درجہ کا ایک
جبری تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے اور اس لیے اس کو اجزائے ضربی میں
تحلیل کیا جاسکتا ہے؟ $\text{جب } 2\text{ط}$ کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا
ہے یہ ہیں
 $\text{جب } 2\text{ط} = \text{جب } 2\text{ط} + \left(\frac{\pi}{n} \right)$ ، $\text{جب } 2\text{ط} = \text{جب } 2\text{ط} + \left(\frac{\pi}{n} \right)$ ،
اس لیے

$$\text{جب } n \text{ ط} - \text{جب } n \text{ نہ} = 2^{\frac{1-n}{n-1}} \cdot \left\{ \text{جب } 2\text{ط} - \text{جب } 2\text{ط} + \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}^{\frac{1-n}{n-1}}$$

(۲۱).....

۸۹۔۔۔۔۔ اب ہم جملہ $2^{\frac{1-n}{n-1}}$ لگ $\text{جب } n \text{ ط} + 1$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$2^{\frac{1-n}{n-1}} \cdot \text{جب } n \text{ ط} + 1 = 2^{\frac{1-n}{n-1}} + 2^{\frac{1-n}{n-1}} + 1$$

$$+ 2^{\frac{1-n}{n-1}} \cdot \text{جب } 2\text{ط} + \left(\frac{\pi}{n} \right) + 1$$

$$- \left(2^{\frac{1-n}{n-1}} \cdot \text{جب } 2\text{ط} + \left(\frac{\pi}{n} \right) + 1 \right)$$

لے فرزند (Forners) نے یہ طریقہ مسخوفانہ تھمیسٹکس کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم $\angle ۲$ - $\angle ۱$ + $\angle ۳$ کو $\angle ۱$ سے تعبیر کریں تو ہم اس متماثلہ کو لکھ سکتے ہیں

$$\angle ۱ = (\angle ۱ + \angle ۳) + \angle ۲ - \angle ۱ - \angle ۲$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ $\angle ۱$ ، $\angle ۲$ سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ $\angle ۱$ اور $\angle ۲$ $\angle ۱$ سے تقسیم پذیر ہوں۔

$$\text{اب } \angle ۱ = (\angle ۱ - \angle ۲ + \angle ۳) + (\angle ۲ - \angle ۱)$$

اس لیے $\angle ۱$ ، $\angle ۲$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\angle ۱$ بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

پس $\angle ۱$ ، $\angle ۲$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\angle ۱$ - $\angle ۲$ + $\angle ۳$ کا ایک

(118)

جزو ضربی $\angle ۱$ - $\angle ۲$ + $\angle ۳$ ہے؛ اب چونکہ $\angle ۱$ - $\angle ۲$ کو بدلے بغیر $\angle ۱$ کو

$\angle ۱$ + $\frac{\pi}{۲}$ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\angle ۱ - \angle ۲ + \angle ۳ = \angle ۱ + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right)$$

دبے ہوئے جملہ کا ایک جزو ضربی ہے جبکہ رکوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں

$r = ۱، ۲، ۳، \dots$ - تو ہمیں دیے ہوئے جملہ کے مختلف اجزائے

ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں، پس

$$\angle ۱ - \angle ۲ + \angle ۳ = \angle ۱ + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\angle ۱ - \angle ۲ + \angle ۳ = \angle ۱ + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots$$

۹۔ مساوات (۲۲) میں رکھو $\angle ۱ = ۰$ تو

$$(\angle ۱ - \angle ۲ + \angle ۳) = \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{۲} - \angle ۲ \right) + \dots$$

اور چونکہ $\text{جم} = \frac{\pi r^2}{n}$ $\frac{\pi (1-n)^2}{n}$ اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں الا آنکہ جب 'ن جفت ہو تو ایک واحد جزو ضربی $1 + 2 + \dots + n$ ہے اور خواہ ن جفت ہو یا طاق بہر صورت جزو ضربی $1 + 2 + \dots + n$ ہے اس لیے

$$(23) \dots \left(1 + \frac{\pi r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{n}) = 1 - \frac{n}{n}$$

جبکہ ن جفت ہو اور

$$(25) \dots \left(1 + \frac{\pi r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{n}) = 1 - \frac{n}{n}$$

جبکہ ن طاق ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں $\frac{\pi}{n} = \text{ط}$ رکھنے سے

$$\left\{1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\pi r^2}{n}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{جم} = \frac{\pi (1+r^2)}{n} = \frac{\pi (1-n)^2}{n}$$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں الا آنکہ جب 'ن طاق ہو تو واحد جزو ضربی $1 + 2 + \dots + n$ ہے پس

$$(26) \dots \left\{1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\pi r^2}{n}$$

جبکہ ن جفت ہو اور

$$(119) (26) \dots \left\{1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\pi r^2}{n}$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۹۱۔ مساوات (۲۲) میں رکھو لا = ا تو

$$۱۔ \text{جم ن ط} = \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \dots \left\{ ۱۔ \text{جم} \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \right\} ;$$

ط کو ۲ میں تبدیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب ن ط} = \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right)$$

$$\text{یا جب ن ط} = \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right)$$

جس میں مبہم علامت اب تک غیر معین ہے۔ دفعہ ۱۵ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ جب ط اور جم ط کی رفوم میں جب ن ط کے پھیلاؤ کی شکل معین ہے، اس لیے بائیں جانب کے حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ ایک ہی ہے؛ اب رکھو ط = $\frac{۱-۱}{۲}$ تو صریحاً علامت جو لیجانی چاہیے مثبت ہے کیونکہ ہر جزو ضربی مثبت ہے۔
اس لیے

$$\text{جب ن ط} = \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right)$$

(۲۸)

(اگر ۲۸) میں ط کو ط + $\frac{۱-۱}{۲}$ سے بدل دیا جائے تو

$$\text{جم ن ط} = \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \frac{۱-۱}{۲} \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right) \dots \left(\frac{۱-۱}{۲} + \text{ط} \right)$$

(۲۹)

مسئلہ (۲۸) میں ط = ۰ رکھنے اور جذر المربع لینے سے مسئلہ (۱۸) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲۹) سے مسئلہ (۱۵) اخذ کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر n ایک طاق صحیح عدد ہو تو $\sin n\theta + \cos n\theta$ جب θ سے $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{3\pi}{2}$ تک θ سے تقسیم پذیر ہے۔

$$\sin n\theta + \cos n\theta = 0$$

$$\sin n\theta + \cos n\theta = 0 \Rightarrow \sin n\theta = -\cos n\theta \Rightarrow \sin n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

پس اگر n طاق ہو تو $\sin n\theta + \cos n\theta = 0$ جب θ سے $\frac{\pi}{2}$ تک θ سے تقسیم پذیر ہے تو $\sin n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ مقدار سے تقسیم پذیر ہے۔ اب $\sin n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ جب θ سے $\frac{\pi}{2}$ تک θ سے تقسیم پذیر ہے۔ نیز $\sin n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ جب θ سے $\frac{\pi}{2}$ تک θ سے تقسیم پذیر ہے۔ اس لیے $\sin n\theta + \cos n\theta = 0$ جب θ سے $\frac{\pi}{2}$ تک θ سے تقسیم پذیر ہے۔

(۲) $\sin n\theta + \cos n\theta$ کے اجزائے ضربی دریافت کرو۔

$$\sin n\theta + \cos n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

(120)

ضابطہ (۲۸) میں θ کی بجائے $\theta - \frac{\pi}{2}$ رکھو تو

$$\sin\left(n\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin n\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right)$$

نیز (۱۶) اور (۱۷) سے

$$\sin n\theta + \cos n\theta = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\theta - \frac{n\pi}{2}\right)$$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت - اب ۱- جب ۲ ط = جم ۲ ط (۱- مس ۲ ط) اس کے
جم ن ط کا جملہ لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)} = \left(\frac{\text{مس } ۲ \text{ ط}}{\pi \frac{۱-۲}{۲}} \right) \text{ یا جم } \frac{1}{2} \text{ ط } \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{\text{مس } ۲ \text{ ط}}{\pi \frac{۱-۲}{۲}} \right)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \text{مس } ۲ \text{ ط} \right) \right\}_{r=1}^n}{\prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{\text{مس } ۲ \text{ ط}}{\pi \frac{۱-۲}{۲}} \right)} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ط}}$$

نسب نامہ میں حاصل ضرب $r = \frac{1}{2} \text{ ن یا } r = \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)}$ تک لینا چاہیے بموجب اس کے کہ
ن جفت ہو یا طاق۔

ساتویں باب پر مثالیں

۱- ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور $\frac{\pi}{2} =$ تو

$$\text{مس } \frac{1}{2} \text{ ن} = (1 - \frac{1}{2}) \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)} + \text{مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)} + \dots + \text{مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)}$$

$$\text{اور } \text{مس } \frac{1}{2} \text{ ن} = \text{مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)} + \text{مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)} + \dots + \text{مس } \frac{1}{2} \text{ (ن-۱)}$$

۲- ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم } ۲ \text{ ط} - \text{جم } ۲ \text{ ط}}{\text{جم } ۲ \text{ ط} + \text{جم } ۲ \text{ ط}} = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ ط}$$

۳- ثابت کرو کہ

$$۱۳ = ۱۳ \text{ جب } ۲ \text{ جب } ۲ \times \dots \times \text{ جب } ۱۳$$

$$\text{اور } ۱ = \frac{۱}{۱} = \text{جم } ۱ + \text{جم } ۶ + \text{جم } ۸$$

$$۲۳ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{\pi}{۲} \text{ مس } \frac{\pi}{۲} \times \dots \times \frac{\pi}{۲} \text{ مس } \frac{۱-\pi}{۲} = ۱$$

جہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$۲۴ - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{قم } ۱ + \text{قم } (۱ + \frac{\pi}{۲}) + \dots + \text{قم } (۱ + \frac{\pi(۱-n)}{۲})$$

$$= n \{ \text{قم } (۱ + \frac{\pi}{۲}) + \dots + \text{قم } (۱ + \frac{\pi(۱-n)}{۲}) \}$$

$$۲۵ - \text{ثابت کرو کہ} \quad (123)$$

$$۲(۱ + \text{جم } n) \text{ یا } \frac{(۱ + \text{جم } n)}{\text{جم } ۲}$$

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تفاعل کا مربع ہے جو جب اس کے کرن ہفت ہے یا طاق۔ دکھاؤ

$$۱ + \text{جم } ۹ = (۱ + \text{جم } ۲)(۱ + \text{جم } ۸ - \text{جم } ۲ - \text{جم } ۱۲ + \text{جم } ۲ + ۱)$$

$$۲۶ - \text{ثابت کرو کہ } ۲ - \text{جم } ۲ - \text{جم } ۱۲ + \text{جم } ۲ + ۱ \text{ سے تقسیم پذیر ہے اگر } n \text{ کی}$$

شکل ۶ م۔ ۱ ہو اور (۱ + ۲ جم ط) سے تقسیم پذیر ہے اگر n کی شکل ۶ م + ۱ ہو جہاں m ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

ثابت کرو کہ

$$۲ - \text{جم } ۲ = \text{جم } ۱۱ = (۱ + \text{جم } ۲)(۱ + \text{جم } ۲ + ۱) + (۱ + \text{جم } ۲ + ۱) + ۱$$

۲۷ - اگر n ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور

$$\text{مس } (۱ + \frac{۱}{۲}) = \text{مس } (۱ + \frac{۱}{۲} + \pi \frac{۱}{۲})$$

تو ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{\frac{\pi}{n} + 1}{\frac{\pi}{n} + 1} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (n-1)!$$

۲۸۔ ثابت کرو کہ شکل ف (جب ط، جم ط، اند (جب ط، جم ط) کا کوئی تفاعل جہاں
ف اور ذ سے ن درجے کے منطق صحیح تفاعل تعبیر ہوتے ہیں اور جن میں جم ط
شامل ہے شکل ۱۱۱ جب $\frac{1}{2} (ط - ط)$ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں ۱ اور
۲۲ جب $\frac{1}{2} (ط - ط)$ مقداریں ط، ط منحصر نہیں ہیں ط پر اور شمار کنندہ میں ۲ اجزائے ضربی ہیں اور نسبتاً
میں ۲ اجزائے ضربی۔

اگر تفاعل $\frac{1}{2} (جم ط + ب جم ط + ج جم ط + د جم ط) + \frac{1}{2} (جم ط + ب جم ط + ج جم ط + د جم ط)$ کو اس شکل میں بیان کیا جائے تو
ثابت کرو کہ ج، ط اور ج، ط کے جفت ضعیف ہیں۔

$$۲۹۔ ثابت کرو کہ مس = \frac{\pi}{11} ۳ + جب ۲ = \frac{\pi}{11} ۲$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} (جم ط + جب ط) = \frac{1}{2} (جم ط - جب ط) = \frac{1}{2} (جم ط + جب ط) = \frac{1}{2} (جم ط - جب ط)$$

فرض کرو $اوب = اوب = ط$ ؛ اور فرض کرو کہ $مب$ اور $مب$ ،
 $ب$ اور $ب$ پر $ماس$ ہیں، اور فرض کرو کہ $ا$ پر $کاماس$ سے $ا$ سے ہے۔
 دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ قوس $ا ب$ کا طول، $اس + س ب$
 سے متجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح قوس $ب ا$ ، $ب س + س ا$
 + $س س$ سے متجاوز نہیں کرتی اور اس لیے قوس $ب ا ب$ > $ب م$
 + $م ب$ ؛ یا قوس $ب ا$ > $ب م$ ۔

نیز

قوس $ب ا < ب ا < ب ج$

اس لیے $\frac{ب ج}{وب} > \frac{قوس ب ا}{وب} > \frac{ب م}{وب}$

$اب ط = \frac{قوس ب ا}{وب}$ ، جب $ط = \frac{ب ج}{وب}$ اور $س ط = \frac{ب م}{وب}$

(125) اس لیے جب $ط > ط > س ط$ ۔ اگر $ط$ سے بڑا ہوتا تو
 م، وکی دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ نامساواتیں جن کو ہم نے
 استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ رہتیں۔

چونکہ جب $ط > ط > س ط$ ، اس لیے $ا > جب ط > ق ط$ ؛
 اب فرض کرو کہ $ط$ کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب $ق ط$ کی انتہا جبکہ
 $ط = ۰$ ، ایک ہے؛ اس لیے نیز $جب ط$ کی انتہا بھی جبکہ $ط$ کو لا انتہا
 گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

$\frac{جب ط}{ط} = (ط ق م ط) \text{ اور } \frac{س ط}{ط} = ق ط \times (ط ق م ط)$

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ $\frac{جب ط}{ط}$ اور $\frac{س ط}{ط}$ کی انتہا جبکہ $ط$

کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔

اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:- مثلث و اب، قاطع و اب، اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث و اب = $\frac{1}{2}$ و اب \times ب ج = $\frac{1}{2}$ و اب ط، نیز قاطع و اب = $\frac{1}{2}$ و اب \times ط، اور

$$\Delta \text{ و ب م} = \frac{1}{2} \text{ و ب} \times \text{ب م} = \frac{1}{2} \text{ و ب} \times \text{مس ط}$$

اس لیے جب ط > ط > مس ط
۹۳۔ دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے زاویہ کا دائری ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور مماس دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً ثنائی، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثنائیوں کی صورت میں

$$\frac{\pi}{40 \times 60 \times 180} \times \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{جب ن}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\pi}{40 \times 60 \times 180} \times \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{مس ن}}{\text{ن}}$$

جہاں ن ثنائیوں کا دائری ناپ ط ہے؛ اس لیے جب ن، مس ن کی

انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لا انتہا گھٹا دیا جائے

کے مساوی ہے۔ پس اگر ہم دائری ناپ کی بجائے ثنائی استعمال کریں تو

ضابطوں کی اُس بڑی جماعت میں جس میں ط = ۰ کے لیے جب ط اور

مس ط کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہمیشہ عدد

$$\frac{\pi}{40 \times 60 \times 180}$$

واقع ہوتا رہیگا۔

م جب $\frac{م}{ط}$ ، م مس $\frac{م}{ط}$ میں سے ہر ایک کی انتہا جبکہ م لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے (126)
 ع ہے، کیونکہ م جب $\frac{م}{ط}$ = ع (جب $\frac{ط}{ط}$)، م مس $\frac{م}{ط}$ = ع (مس $\frac{ط}{ط}$)۔ جہاں
 ط = $\frac{م}{ط}$ ، اور جب م کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو ط لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے۔
 جب ف $\frac{ط}{ط}$ اور مس ف $\frac{ط}{ط}$ میں سے ہر ایک کی انتہا جبکہ ط لا انتہا گھٹا دیا جائے
 جب ق $\frac{ط}{ط}$ کے مساوی ہے۔

تو جب ط' ط اور ط - $\frac{1}{4}$ ط کے درمیان واقع ہوتا ہے اور

جم ط

۱ - $\frac{1}{4}$ ط اور ۱ - $\frac{1}{4}$ ط + $\frac{1}{4}$ ط کے درمیان واقع ہوتا ہے -

۹۵ - اب ہم یہ دکھانے کے لئے اگر ط > $\frac{1}{4}$ ط تو

جب ط < ط - $\frac{1}{4}$ ط اور جم ط > ۱ - $\frac{1}{4}$ ط + $\frac{1}{4}$ ط

اس سے جب ط اور جم ط کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ تنگ ہو جاتی ہیں -

ہم جانتے ہیں کہ

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ ط} = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ ط} = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}$$

ان مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳ سے ضرب دو اور

پھر جمع کر دو تو

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ \text{ (جب } \frac{1}{4} \text{ ط} + ۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} + \dots + ۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط)}$$

اس لیے

(127)

$$ط \times \frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط > ۴ \left(\frac{1}{4} \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ ط} + \dots + \frac{1}{4} \text{ ط} \right)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا کر دو تو $\frac{1}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}$ کی انتہا ایک لمبی ہے اور سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1$$

کی انتہا $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ ؟

اس لیے ط۔ جب ط $> \frac{1}{4}$ ط^۳، یا جب ط $< \frac{1}{4}$ ط^۲

نیز جم ط = ۱ - ۲ جب ط $\frac{1}{4}$ ط

اس لیے جم ط $> ۱ - ۲$ (ط - $\frac{1}{4}$ ط^۳) $> ۱ - ۲$ (ط^۲ + $\frac{1}{4}$ ط^۳)

پس جب ط، ط اور ط - $\frac{1}{4}$ ط^۲ کے درمیان واقع ہوتا

ہے؛ اور جم ط، ۱ - $\frac{1}{4}$ ط^۲ اور ۱ - $\frac{1}{4}$ ط^۲ + $\frac{1}{4}$ ط^۳ کے

درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ط، $\frac{1}{4}$ ط^۳ سے کم ہو۔

نیز چونکہ مس ط = جب ط \ جم ط اس لیے

مس ط $< (ط - \frac{1}{4} ط^۳) - (۱ - \frac{1}{4} ط^۲) < (ط - \frac{1}{4} ط^۳) - (۱ - \frac{1}{4} ط^۲ + \frac{1}{4} ط^۳)$

یا مس ط $< ط + \frac{1}{4} ط^۳ - \frac{1}{4} ط^۲$ ، اس لیے مس ط $< ط + \frac{1}{4} ط^۳$

یولر کا حاصل ضرب

۹۶۔ چونکہ جب ط = ۲ جب ط $\frac{1}{4}$ ط جم ط $\frac{1}{4}$ ط،

جب ط $\frac{1}{4}$ ط = ۲ جب ط $\frac{1}{4}$ ط جم ط $\frac{1}{4}$ ط،

جب ط $\frac{1}{4}$ ط = ۲ جب ط $\frac{1}{4}$ ط جم ط $\frac{1}{4}$ ط

جب ط $\frac{1}{4}$ ط = ۲ جب ط $\frac{1}{4}$ ط جم ط $\frac{1}{4}$ ط

ایک سے $\frac{1}{2}$ تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{4}$ تک بڑھتا ہے۔
پھر ہم یہ دکھائی گئے کہ

$$\sin(\phi + \infty) < \frac{\sin \phi}{\phi} \quad \text{یا}$$

ط جب $(\phi + \infty)$ جم ط $< (\phi + \infty)$ جم ط جب $(\phi + \infty)$

یعنی ط جب $\infty < \infty$ جب ط جم $(\phi + \infty)$

یا جب $\frac{\infty}{\phi} < \frac{\sin \phi}{\phi}$ جب ط جم $(\phi + \infty)$ ؛

اب ہم فرض کر سکتے ہیں $\phi > \pi$ پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\sin \phi}{\phi} < \frac{\sin \pi}{\pi} \quad \text{اور اس لیے جب ط} < \frac{\sin \phi}{\phi} \text{ جب ط جم } (\phi + \infty)$$

اس طرح $\frac{\sin \phi}{\phi}$ ایک سے ∞ تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{4}$ تک بڑھتا ہے۔

دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی تریسوں سے یہ نظر آئیگا کہ سائل بالادست ہیں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو فصلہ کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{4}$ تک بڑھتا ہے۔

(۲) ثابت کرد کہ مساوات $\sin \phi = \phi$ لاکھائی حقیقی اصولوں کی تعداد لا انتہا

ہے، نیز بڑی اصولوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کر دے۔

دفعہ ۳۲ میں تفاعل میں لاکھائی تریسیم کھینچی گئی ہے؛ اسی شکل میں تفاعل

کہ لاکھائی تریسیم کھینچو، یہ ایک خط مستقیم ہے جو وہیں سے گزرتا ہے۔ یہ خط مستقیم

(129)

مربعی اس لاکھائی تریسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا، اور لاکھائی وہ قیمتیں جو نقاط تفاعل کے

مناظر ہیں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$\phi = (1 - k) \frac{\pi}{2} \quad \text{اور} \quad \phi = (1 + k) \frac{\pi}{2}$$

کے درمیان ہے جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اگر ک لہ بڑا ہو تو $(۱+ک) \frac{\pi}{۲}$ صریحاً ایک تقریبی حل ہے؛ اس سے زیادہ نزدیک کا تقرب معلوم کرنا ہوتا تو فرض کرو لا $= (۱+ک) \frac{\pi}{۲} + ما$ جہاں ما چھوٹا ہے، تب $م = لا - ما + (۱+ک) \frac{\pi}{۲}$ ؛ اب $م = لا$ ، جب $ما = ۰$ رکھنے سے اور ما کو نظر انداز کرنے سے

$۱ - (۱+ک) \frac{\pi}{۲} لا = ما$ ، $\frac{۲}{\pi ل (۱+ک)} - لا = (۱+ک) \frac{\pi}{۲}$ ۔
تقریبی حل ہے۔ اس سے بھی زیادہ تقریبی حل معلوم کرنے کے لیے ما نظر انداز کر دو ان رقموں میں جن میں ما شامل ہے $ما = - \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{۱}{۲} - لا = ۱ - \left\{ (۱+ک) \frac{\pi}{۲} لا + ما \right\} = لا$ ، $ما = لا - (۱+ک) \frac{\pi}{۲} لا$ ،
اس لیے $ما = (۱+ک) \frac{\pi}{۲} لا - ۱ + \left(لا - \frac{۱}{۲} \right) \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)}$ ،
 $ما = - \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)} + \left(لا - \frac{۱}{۲} \right) \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)}$ ،
اس لیے لا کی تقریبی قیمت ہے

$$۱ - (۱+ک) \frac{\pi}{۲} لا = \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)} + \left(لا - \frac{۱}{۲} \right) \frac{۲}{\pi ل (۱+ک)}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۲} = مم ط + \frac{۱}{۲} مس ط + \frac{۱}{۴} مس ط + \frac{۱}{۸} مس ط + \frac{۱}{۸} مس ط + \dots$$

یہ آسانی کے ساتھ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{۱}{۲} مم ط - مم ط = \frac{۱}{۲} مس ط$$

اس لیے نیز $\frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p}$ ،

$$\frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p}$$

اس لیے عمل جمع سے

$$\frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \dots + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p}$$

اب اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p}$ کی انتہائی قیمت $\frac{1}{p}$ ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ $\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p}$ ہے۔

اگر ہم رکھیں $\frac{1}{p} = \pi$ تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \dots$$

بعض جملوں کی انتہائیں

(130)

۹۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{p} \text{ مم } \frac{p}{p}$ ، جب $\frac{p}{p}$ میں

سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے (جم $\frac{p}{p}$) ، (جب $\frac{p}{p}$) میں

سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ کوئی عدد ہو جو ن کے

تابع نہیں ہے؛ لیکن اگر ر، ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے

لاتنا ہی ہونے پر لاتنا ہی ہو جاتا ہے تو جملے (جسم $\frac{p}{p}$) ف (ن) ،

(جب $\frac{p}{p}$) ف (ن) جماعت ۱ سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں۔

(جم ط) ف (ن) کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو
ع سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک } \frac{1}{p} = \text{ف (ن) لوک } (1 - \text{جب } \frac{2}{p})$$

اب ہم اس مسئلہ کو معلوم مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لاکولا انتہا گھٹا دیا جائے تو

$$\text{ہنا } \frac{\text{لوک } (1 - \frac{2}{p})}{p} = 1 -$$

تب چونکہ

$$\text{لوک } \frac{1}{p} = \text{ف (ن) جب } \frac{2}{p} \frac{\text{لوک } (1 - \text{جب } \frac{2}{p})}{\text{جب } \frac{2}{p}}$$

اس لیے لوک $\frac{1}{p}$ کی انتہا $\frac{1}{p}$ ف (ن) جب $\frac{2}{p}$ کی انتہا کے مساوی

ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ مؤخر الذکر انتہا موجود ہو۔ ہم
حسب ذیل صورتوں میں لوک $\frac{1}{p}$ کی انتہا اور اس لیے $\frac{1}{p}$ کی انتہا معلوم
کر سکتے ہیں:-

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب $\frac{2}{p}$

$$= \text{ن جب } \frac{2}{p} \text{ جب } \frac{2}{p} \text{ اور ن جب } \frac{2}{p} \text{ کی انتہا } \frac{2}{p} \text{ ہے اور جب } \frac{2}{p}$$

کی صفر ہے؛ اس لیے لوک $\frac{1}{p}$ کی انتہا صفر ہے اور اس لیے $\frac{1}{p}$ کی انتہا

ایک ہے۔

(۲) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب $\frac{2}{p}$

$$= (\text{ن جب } \frac{2}{p}) \text{ جس کی انتہا } \frac{2}{p} \text{ ہے۔ اس لیے لوک } \frac{1}{p} \text{ کی انتہا } \frac{1}{p} \text{ ہے اور } \frac{1}{p}$$

ہے اور $\frac{1}{p}$ کی

(۳) اگر ف (ن) = ف جہاں ف < ۲ تو اس صورت میں
 ن جب ط = ف - ۲ (ن جب ط) ۲ اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ ن
 لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے لوک ۲ کی انتہا - ۵ ہے اور اس لیے ع کی
 انتہا صفر ہے۔

۹۸ — (جب ط) (جب ط) کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ جب ط / مس جب ط سے کم ہے اور جب ط (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے (جب ط) کی انتہا ۱ آیا اور (جم ط) کے درمیان واقع
 ہے؛ اس طرح دفعہ مابقی کی صورت (۱) سے (جب ط) کی انتہا
 ایک ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ (جب ط) اور (جب ط) ۲

(ف < ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور ۱/۲ کے درمیان اور
 ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں۔

زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے

اس کے دائرۃ ناپ کی قوتوں میں

۹۹ — چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹) (۴۰) میں ۱ کی بجائے ط لکھو

اور فرض کر دلا = ن ط تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^1 \text{ ط جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{2} \text{جم}^2 \text{ ط جب}^3 \text{ ط} + \dots$$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-1) \dots (\text{ن}-10)}{1+2} \text{جم}^{\text{ن}-10} \text{ ط جب}^{10} \text{ ط} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}} \text{ ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2} \text{جم}^{\text{ن}-1} \text{ ط جب}^2 \text{ ط} + \dots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1) \dots (\text{ن}-10)}{1+2} \text{جم}^{\text{ن}-10} \text{ ط جب}^{10} \text{ ط} + \dots$$

ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے :-

(132)

$$\text{جب لا} = \text{لا جم}^1 \text{ ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)}{3} \text{جم}^2 \text{ ط} (\text{جب ط})^3 + \dots$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا}-1) \dots (\text{لا}-10)}{1+2} \text{جم}^{\text{ن}-10} \text{ ط} (\text{جب ط})^{10} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}} \text{ ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)}{2} \text{جم}^{\text{ن}-1} \text{ ط} (\text{جب ط})^2 + \dots$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا}-1) \dots (\text{لا}-10)}{1+2} \text{جم}^{\text{ن}-10} \text{ ط} (\text{جب ط})^{10} + \dots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے۔ پس اس غرض کے لیے کہ جلوں کی انتہائیں حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

(183)

صفر اور ا کے درمیان ایک عدد ہے۔ صحیح عدد ر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے جو اس سے کم نہ ہو۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \text{جم ك ط} - \frac{\text{لا (ل ط)}}{2} \text{ جم}^2 - \text{ط} \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right)^2$$

$$\dots - \frac{r}{b} \left(\frac{b}{b} \right)^{r-1} \frac{(b^3 - 1)(b^2 - 1)(b - 1)}{21} +$$

$$+ (-1)^n \frac{(1-\lambda)(2-\lambda) \dots (n-1-\lambda)}{n!} \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^n$$

بشرطیکہ ن کے ن ؛ س ؛ ن پر منحصر نہیں ہے اور صہ ، صفر اور ایک کے درمیان ایک عدد ہے۔

اب فرض کرو کہ ان لا انتہا بڑھا دیا گیا ہے تو جب لا اور جسم لا کے لیے جو جملے ہیں ان کی انتہا میں ان تفاعلوں کو تغیر کرنی چاہیں۔ اب چونکہ ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد مستقل ہے اور ان کے تابع نہیں۔ اس لیے ہمیں صرف مختلف رقموں کی انتہاؤں کو جمع کرنا ہو گا تاکہ مجموعہ کی انتہا معلوم ہو سکے۔ (جب طہ) کی انتہا جیسے کہ ن پر منحصر نہیں ہے ایک ہے۔ نیز جسم ن کہ طہ کی انتہا = جسم طہ کی انتہا

اور دفعہ ۹ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ لوک $\text{جم} ط = ۱$ ، اور چونکہ
لوک $\text{جم} ط = ۱$ اس لیے لوک $\text{جم} ک ط = ۱$ حاصل ہوتا ہے؟ اس لیے
لوک $\text{جم} ن ک ط = ۱$ ؟ اعداد صہ اور صہ، ن پر منحصر ہیں لیکن
ن کی ہر قیمت کے لیے وہ صفر اور ایک کے درمیان ہیں اور اس لیے
ان کی انتہائیں صہ اور صہ ایک سے تجاوز نہیں کر سکتیں۔ پس ہمیں
حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } لا = لا - \frac{لا}{۳} + \frac{لا}{۵} - \dots + (-۱)^{لا} \frac{لا}{۱+۲لا}$$

$$\text{جم } لا = ۱ - \frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۴} - \dots + (-۱)^{لا} \frac{لا}{۲لا}$$

جہاں صہ اور صہ مثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کر سکتے۔

یہ نتیجے درست رہتے ہیں لاکھ ہر قیمت کے لیے اور ر اور س کی تمام قیمتوں کے لیے جو ثابت صحیح اعداد اور س سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لاکھ ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$لا - \frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۵} - \dots + (-۱)^{لا} \frac{لا}{۱+۲لا} + \dots$$

اور جم لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$۱ - \frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۴} - \dots + (-۱)^{لا} \frac{لا}{۲لا} + \dots$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ، جب لا سے

بقدر $\frac{لا}{۱+۲لا}$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لاکھ ہر قیمت کے لیے (184)

اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر رک کو کافی بڑا لیا جائے۔

یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت $\frac{لا}{(۱+۲لا)}$

$$\times \frac{لا}{۱+۲لا} : \frac{لا}{۱-۲لا} ، لاکھ کسی مقررہ قیمت کے لیے رک$$

کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔

اسی طرح کا استدلال جم لا کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جم لا کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جم لا = $\frac{1}{4}$ (جم لا + جم لا + جم لا)؛ اس لیے جم لا کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے ہمیں جم لا کے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(۱) \quad \frac{۱}{۴} = \frac{۳ + ۳ + ۳}{۱۲} \quad \text{لا}$$

یہ معلوم ہوگا کہ جم لا یا جب لا کی کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں سے حاصل ضرب کو لا کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لا کے ضیعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان کریں۔

(۲) مس لا کو لا کی قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں لا شامل ہے۔
مس لا = جب لا \ جم لا

$$= \left\{ \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ \right\} \left\{ \frac{۱}{۵۰۴} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} \right\}$$

لا سے اعلیٰ رتبہ کی رقوم کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو ضربی کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس لا} = \left\{ \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ \right\} \left\{ \frac{۱}{۵۰۴} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} \right\} + \left(\frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۴} \right) + \left(\frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۲} \right) + ۱$$

$$+ \left(\frac{۱}{۴} \right) +$$

ضرب دینے اور لا تک کی رقوم کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس لا} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۳۱۵}$$

(۲) جب (مس لا) - مس (جب لا) کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا = $\frac{1}{15}$

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال مابقی کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \frac{1}{4} \text{مس}^2 \text{ لا} + \frac{1}{12} \text{مس}^3 \text{ لا} - \frac{1}{20} \text{مس}^4 \text{ لا} - \text{جب لا} - \frac{1}{3} \text{جب}^2 \text{ لا} \\ - \frac{2}{15} \text{جب}^3 \text{ لا} - \frac{4}{15} \text{جب}^4 \text{ لا}$$

اور یہ، لا سے اعلیٰ رتبہ کی قوتوں کو خارج کر دینے سے

$$= (\text{لا} + \frac{1}{3} \text{لا}^2 + \frac{2}{15} \text{لا}^3 + \frac{4}{15} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4} \text{لا}^2 + \frac{1}{12} \text{لا}^3 + \frac{1}{20} \text{لا}^4) - (\frac{1}{3} \text{لا} + \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{20} \text{لا}^3) - (\frac{2}{15} \text{لا} + \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{20} \text{لا}^3) - \frac{4}{15} \text{لا}^4 \\ - (\frac{1}{3} \text{لا} + \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{20} \text{لا}^3) - \frac{2}{15} \text{لا} - (\frac{1}{3} \text{لا} + \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{20} \text{لا}^3) - \frac{4}{15} \text{لا}^4$$

یہ جملہ - $\frac{1}{3} \text{لا}$ میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اس لیے دیے ہوئے جملہ کی انتہا - $\frac{1}{3} \text{لا}$ ہے۔

مثلثی اور جبری متماثلات کے درمیان ایک شے

(135)

۱۰۰۔۔۔۔۔ کسی مثلثی متماثلہ سے جس میں زاویے جہوں کے متجانس
تفاعل ہوں جبری متماثلات کا ایک سلسلہ اخذ کیا جاسکتا ہے اس طویل
کہ دائری تفاعلوں کو زاویوں کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلا یا جائے
اور ایک ہی رتبہ کی قوتوں کو مساوی رکھا جائے۔ مثلاً ضابطہ
جب (ا) جب ب = $\frac{1}{4}$ {جم (ا - ب) - جم (ا + ب)} میں جیوب اور
جیوب التمام میں سے ہر ایک کو پھیلاؤ اور دوسرے رتبہ کی قوتوں کو
مساوی رکھو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \{ (ا + ب) - (ا - ب) \}$$

چوتھے باب کے دفعات ۴۴ اور ۴۵ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل
مثلی اور جبری مثالیات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلی متماثل سے
جبری متماثلہ حاصل ہوتی ہے اگر متذکرہ بالا طریقہ کو کام میں لایا جائے۔
مثلاً دفعہ ۴۵ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جاسکتا ہے

جیب ۱ جب (ب + ج - ا) - ۲ جب ۱ جب ب جب ج

$$= \text{جب (ب + ج - ا)} \text{ جب (ج + ا - ب)} \text{ جب (ا + ب - ج)}$$

اگر ہم جو ب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں حسب ذیل متماثل جبری متانکہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(ج-ب+۱)(ب-۱+ج)(۱-ج+ب) = ج۲-۱-ج+ب$$

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

مس ط ≤ 2 مس $\frac{1}{p}$ ط، جہاں ط $> \frac{1}{p}$ ط

۲۔ مس ۳ ط ۳ ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صغیر سے ۱/۴ تک بڑھتا ہے ان کو مرتسم کو و۔

ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت ۱۷ - ۲۱۲ ہے اور اعظم قیمت ۱۷ + ۲۱۲ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ اور $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

۴۔ ثابت کرو کہ $p < \frac{3}{2} \text{ جب } p > \frac{1}{p}$ ، جہاں $p > \frac{1}{p}$

۵۔ ثابت کر دو کہ $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} < 3\sqrt{7}$ ، اگر ط، صفر اور $\frac{7}{10}$ کے درمیان واقع ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}$ کی انتہائی قیمت (جبکہ $x = 0$) $\frac{1}{4}$ ہے۔

- ۷۔ ثابت کرو کہ جب $(\text{جم } ط) > (\text{جب } ط)$ ، ط کی تمام قیمتوں کے لیے۔ (136)
۸۔ ثابت کرو کہ لا تنہائی حاصل ضرب

$$(1 - \text{مس } \frac{1}{p}) (1 - \text{مس } \frac{1}{p}) (1 - \text{مس } \frac{1}{p}) \dots$$

کی انتہائی قیمت $\frac{ط}{\text{مس } ط}$ ہے۔

۹۔ اگر $\text{جب } (ط - ذ) = 1 + ن$ اور ن بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ
جب ذ

$$\text{جب ذ} = (1 - \frac{1}{n}) \text{ جب } \frac{1}{p} ط، تقریباً$$

۱۰۔ جب $(ط \text{ جم } ط)$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $ط = \frac{1}{p} \pi$
جم $(ط \text{ جب } ط)$

۱۱۔ $\text{مس } ۲ ط - ۲ \text{ مس } ط$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $ط = ۰$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{مم } ط}{۲ - ۲ \text{ جب } ط} \right) \text{ مس } \left(\frac{1}{p} \pi + \frac{1}{p} ط \right)$$

کی انتہائی قیمت $\frac{۳}{۲}$ ہے جبکہ $ط = \frac{1}{p} \pi$
۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جب } لا}{p} \right)^۲ = 1 - \text{جب } \frac{۱}{p} - \text{جم } \frac{۱}{p} - \text{جب } \frac{۱}{p} - \text{جم } \frac{۱}{p} - \text{جب } \frac{۱}{p} - \dots$$

۱۴۔ اگر مساوات $\frac{1}{\text{مم } عم} + \frac{1}{\text{مم } عم} = \text{مس } ط$

میں $\text{مس } عم، عم، عم، عم$ سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ط

$$\frac{1}{p} (\text{عم} + \text{عم} + \text{عم} + \text{عم})$$

بتاؤ کہ کس طرح π کی قیمت اس ضابطہ کے ذریعہ محسوب کی جاسکتی ہے۔
۲۱۔ لامتناہی حاصل ضرب

(جب $\frac{1}{2}$ ط $\frac{1}{2}$ ط) $\frac{1}{2}$ (جب $\frac{1}{4}$ ط $\frac{1}{4}$ ط $\frac{1}{4}$ ط) $\frac{1}{4}$ (جب $\frac{1}{8}$ ط $\frac{1}{8}$ ط $\frac{1}{8}$ ط $\frac{1}{8}$ ط) $\frac{1}{8}$...
کی انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر مس ط = ۴ ط تو ط کی قیمت صفر اور $\frac{1}{\pi}$ کے درمیان یہ ہوگی

$$\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^4} + \dots \right) - \frac{\pi}{2}$$

۲۳۔ ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ ط}}{1 - \frac{1}{2} \text{ ط}} \times \frac{1}{2} \right\}^\infty = \frac{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ ط}}{1 + \frac{1}{2} \text{ ط}}$$

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$(1 - \frac{1}{2} \text{ ط}) (1 - \frac{1}{4} \text{ ط}) (1 - \frac{1}{8} \text{ ط}) \dots = \frac{1 + \frac{1}{2} \text{ ط}}{1 + \frac{1}{4} \text{ ط}}$$

۲۵۔ ن رقموں تک جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{4} \text{ لوک مس } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ لوک مس } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ لوک مس } 2 \text{ ط} + \dots$$

۲۶۔ اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{\text{ط} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ط}}{\text{ط} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}}$ کی انتہائی قیمت جبکہ ط = ۰، صفر نہ لامتناہی

تو ن معلوم کرو۔

$$1 - \frac{1}{2} \text{ جم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ جم } 2 \text{ ط} - \frac{1}{8} \text{ جم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{16} \text{ جم } 2 \text{ ط} - \dots$$

۲۷۔ $1 - \frac{1}{2} \text{ جم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ جم } 2 \text{ ط} - \frac{1}{8} \text{ جم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{16} \text{ جم } 2 \text{ ط} - \dots$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = ۰۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ اس لائناری سلسلہ کا مجموعہ جس کی رو میں رقم

$$\frac{1}{2-12} \times \frac{1}{1-12} \frac{1-1}{(1-1)}$$

ہے $\frac{1}{2}$ جب $(1 + \pi \frac{1}{2})$ ہے۔

۲۹۔ اگر صہ بہت چھوٹا ہو اور نہ $= ط - ۲$ صہ جب $ط + \frac{3}{4}$ صہ جب $۲ ط$ تو ثابت کرو کہ

$ط = نہ + ۲$ صہ جب نہ $+ \frac{5}{4}$ صہ جب $۲ نہ$ ، تقریباً
۳۰۔ اگر $ما = ی + ک$ جب $(ی + ک = ط)$ تو ی کو چھوٹی مقدار ک کی قوتوں میں ملے قیاس
تک پھیلاؤ جس میں ک شامل ہے۔

۳۱۔ مثالی متانلہ

جب (د-ب) جب (ا-ج) + جب (ب-ج) جب (ا-د) + جب (ج-د) جب (ا-ب) =
سے جبری متانلہ

$$(د-ب) (ا-ج) \{ (د-ب) + (ج-ا) \} + (ج-ا) \{ (د-ب) + (ب-ج) \} + (ب-ج) \{ (د-ب) + (ا-ج) \} = ۰$$

اخذ کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ نہ $\frac{3}{4}$ جب $۲ نہ$ سے تقریباً $\frac{4}{5}$ نہ کا فرق رکھتا ہے جہاں (138)

نہ ایک چھوٹا زاویہ ہے۔

۳۳۔ اس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے مقامات تک
معلوم کرو جو مساوات

$$جب (لا + \frac{1}{4} \pi) = ۱۰ جب لا$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۴۔ مساوات (جب ط) $ا = ب$ کو تقریبی طور پر حل کرو جہاں مثبت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ ط، عد کے تقریباً مساوی ہے اور عد خود بہت چھوٹا نہیں ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ط کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ $\tau = 2$ جب ط، اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارہی جدول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۶۔ رشتہ $\lambda = \frac{b}{a}$ جب λ ما میں جہاں λ اور b ایک دوہر کے لحاظ سے مفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ λ کی ہر قیمت کے جواب میں λ کی قیمتیں ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ λ اور b دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں λ کی قیمتیں ہیں۔

۳۷۔ یہ مانکر کہ اگر عد وہ حادثہ نہ اویہ ہو جس کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے جب، عد کو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہونا چاہیے ثابت کرو کہ جم نہ۔ جم $\frac{\pi}{4}$ کا اضافہ $\frac{\pi}{4}$ پر ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ سے کم ہے۔

نَوَالِ بَاب

مثلی جدولیں

(139)

۱۰۱۔ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں

کے حل میں اور عددی اعمال میں عملاً مفید ہونے کیلئے یہ ضروری ہے کہ ہمارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعلوں کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کر سکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کر سکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارٹری جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارٹم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتے ہیں۔

۱۔ لوکارٹوں کو پہلے "مضوعی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے معمولی اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

کی مدد سے ہم آیا۔ ا کے ضفوں کی جیوب اور جیوب التام محسوب کر سکتے ہیں۔ فرض کرو $۱۰ = ۲۰$ ، $۱۰ = ۲۰$ ، $۲ = ۲$ ۔ ک جہاں ک = ۲۳۵.۲۰..... تو یہ ضابطے لکھے جا سکتے ہیں۔

جب ن ا جب (ن-۱) = ۱ جب (ن-۱) ۱ جب (ن-۲) ۱ جب (ن-۱) ۱
جب ن ا جب (ن-۱) = ۱ جب (ن-۱) ۱ جب (ن-۲) ۱ جب (ن-۱) ۱

اگر ان ضابطوں میں ہم رکھیں $۲ = ۲$ تو ہم جب ۲۰ اور جم ۲۰ محسوب کر سکتے (141)

ہیں۔ اب ن = ۳، ۴، ۵، ... فرض کرنے سے فرقوں جب ن ا جب (ن-۱) ۱
جم ن ا جب (ن-۱) ۱ کو محسوب کیا جاسکتا ہے اگر ان سے پہلے کے فرق
جم (ن-۱) ۱ جب (ن-۲) ۱ جب (ن-۱) ۱ اور نیز جب (ن-۱) ۱
اور جم (ن-۱) ۱ معلوم کر لیے گئے ہوں؛ پس یہ فرق ضابطوں کے مسلسل
استعمال سے معلوم کیے جا سکتے ہیں؛ پھر ہم جب ن ا جب (ن-۱) ۱ معلوم
کر سکتے ہیں اور اس طرح ۱۰ کے وقفوں سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التام
کی ایک جدول بنا سکتے ہیں۔ چونکہ ک = ۲۳۵.۲۰.....
اس لیے ک جب (ن-۱) ۱، ک جب (ن-۱) ۱ کو محسوب کرنے میں ہیں
جب (ن-۱) ۱، جم (ن-۱) ۱ کی قیمت کے صرف پہلے چند ہندسوں کو
استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔

۱۰۔ جب ضابطوں کے متواتر استعمال سے جب ن ا جب (ن-۱) ۱
حسب قاعدہ بالا محسوب کر لیے جاتے ہیں تو جب ۲، جم ۲ کی تقریبی قیمتوں کے
استعمال سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں وہ اس عمل میں اکٹھی ہو جائیں گی؛ اس لیے
یہ غور کرنا ضروری ہے کہ اس عمل میں اعشاریہ کے کتنے مقامات استعمال کیے جائیں
کہ جب ۲، جم ۲ کی اختیار کردہ قیمتوں سے (جو اعشاریہ کے چند مقامات تک صحیح ہیں)
ہیں جب ن ا جب (ن-۱) ۱ کی قیمتیں اعشاریہ کے مقامات کی ایک مقررہ تعداد تک
صحیح معلوم ہو سکیں۔

فرض کرو کہ جب ۲، جم ۲ اعشاریہ کے کم مقامات تک محسوب کیے گئے ہیں

اور فرض کرو کہ ا کے متواتر مضغفوں کی جویوب اور جویوب التمام کے محسوب کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جب ن آیا جم ن ا کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے ع ن ہے، اور اس کے جواب میں صحیح قیمت ع ن + لان ہے، تب

$$\text{تب} \quad \text{ع ن} + \text{لان} = (\text{ک} - ۲) (\text{ع ن} - ۱ - \text{لان} - ۱) - (\text{ع ن} - ۲ - \text{لان} - ۲)$$

$$\text{نیز} \quad \text{ع ن} = (\text{ک} - ۲) (\text{ع ن} - ۱ - \text{لان} - ۱) - \text{ع ن} - ۲$$

جہاں ک، اعشاریہ کے مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو

$$(\text{ک} - \text{ک}) (\text{ع ن} - ۱ - \text{لان} - ۱) = ۰$$

$$\text{ع ن} = (\text{ک} - ۲) (\text{ع ن} - ۱ - \text{لان} - ۱) + \text{لان} + ۲$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{لان} = (\text{ک} - ۲) (\text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۲) - \text{لان} - ۲$$

$$\text{یا} \quad \text{لان} = ۲ - \text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۲ - \text{لان} - ۲ = \text{لان} + \text{ک} - ۱$$

$$\text{اس کو نکالنا جاسکتا ہے} \quad (\text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۱) = (\text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۲) - \text{لان} - ۲$$

$$\text{پس اسی طرح} \quad (\text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۲) = (\text{لان} - ۲ - \text{لان} - ۳) - \text{لان} - ۳$$

.....

$$\text{لان} - ۱ = \text{لان} - ۱ - \text{لان} - ۱$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{لان} - \text{لان} - ۱ = \text{لان} - ۱ - (\text{لان} - ۱ + \text{لان} - ۲ + \dots + \text{لان} - ۱)$$

عدد ک لان - ۱، بمقابلہ لان - ۱ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے لان + ک لان - ۱ لان

سے ناقابل قدر فرق رکھتا ہے؛ پس عددوں لان - ۱، لان - ۲، ... لان - ۱ میں سے

ہر ایک لان - ۱ سے کم ہے اور اس لیے ان کا حسابی اوسط لان - ۱ سے کم ہے؛ اس لیے

$$لا - لا - ۱ = لا - (۱ - ن) ط$$

$$لا - لا - ۲ = لا - (۲ - ن) ط$$

$$.....$$

$$لا - لا = لا - ط$$

$$یا \quad لا = ن لا - (ط + ۲ ط + + ن - ۱ ط)$$

(142) اب چونکہ ط، ط، ...، ط میں سے ہر ایک ۱/۲ سے کم ہے اس لیے

$$- (ط + ۲ ط + + ن - ۱ ط) > \frac{1}{2} ن (۱ - ن)$$

$$یعنی \quad لا > \frac{ن}{10} + \frac{ن(۱ - ن)}{10 \times 2}$$

$$پس بدھتہ \quad لا > \frac{ن}{10} + \frac{ن^2}{10 \times 2} \dots \dots \dots (م)$$

اگر اس ضابطہ میں رکھیں م = ۱۲، ن = ۱۰۸۰۰ تو

$$لا > \frac{۱۰۸}{10} + \frac{۵۸۳۲}{۴ - ۱0}$$

$$> ۱۰۸ + ۵۸۳۲ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (۸-۷) صفر ہیں؛ اس لیے اگر $ر = ۱۵$ تو $لا > ۱۰۸ + ۵۸۳۲ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ یعنی ۷ اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب $۱۰۸ \times ۱۰۸۰۰ = ۱۱۶۶۴۰۰$ اس لیے ۳ کی جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ۱۰ کے مضبوطی کے ذریعے ۱۰ کی جیب یا جیب التمام کے محوب کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے ۱۵ مقامات لکھیں۔ ضابطہ (م) ایسی صورتوں میں عدد کو متعین کرنے کے لیے اتمال ہو سکتا ہے تاکہ لای اعشاریہ کے مقامات کی ایک خاص تعداد تک صفر ہو سکے۔

۱۔ اس فن کا مکمل مولویرٹ (Berret) کی فکریطری سے لیا گیا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ۱۰ کے ضعفوں کے ذریعے ۵۴ تک کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے ۸ صحیح مقامات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ حجم ۱۰، ۱۰ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عمل حساب میں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات رکھے جائیں۔

۱۰۵۔ جب ۱۰ زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی جدول درکار ہو جو ۱۰ کے یا ۱ کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۲۰ تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۲۰ سے ۹۰ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں ضابطوں

$$\text{جب } ۱ = (۱ + ۲۰) + \text{جب } (۲۰ - ۱۲) = \text{جم } ۱$$

$$\text{جم } (۲۰ - ۱) - \text{جم } (۱ + ۲۰) = \text{جب } ۱$$

کے ذریعے ۱ کو ۲۰ تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۴۰ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۵۴ اور ۹۰ کے درمیان کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ضابطہ

$$\text{جب } ۱ = \text{جم } (۱ - ۹۰)$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۵۴ سے آگے کے زاویوں کے لیے عمل حساب کو جاری رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائری تقاطعوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیب، ماسول، اور قاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۶ء میں اس کے انتقال کے بعد شائع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی کی (Almagest) میں وتروں کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے ہے جدول کے مضمون پر تاریخی معلومات ہٹن (Hutton) کی مہٹری آف میتھمیٹیکل ٹیبلز

(148)

جم ۱ = جب (۵ + ۱) + جب (۴ - ۱) - جب (۸ + ۱) - جب (۹ - ۱) (یہ لیونڈر کا ضابطہ ہے)
تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان متاثرات میں تفاعل کی حاصل کردہ قیمتیں درج کیجائیں۔

ماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷۔ ماسوں کی جدول بنانا ہوتا ہے تک کے زاویوں

کے ماس، ضابطہ مس ۱ = جب ۱ کے ذریعے جویب اور جویب التمام کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۴۰ سے ۹۰ تک کے زاویوں کے ماس کا گنتی کے ضابطے

$$\text{مس } (۱ + ۴۵) = ۲ \text{ مس } ۲۲ + \text{مس } (۱ - ۴۵)$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التمام کی جدول ضابطہ قم ۱ = مس ۱ + م ۱ کے ذریعے اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ۱ = مس ۱ + مس (۴۵ - ۱) کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں۔

سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا

(144)

۱۰۸۔ زاویوں کی جویب اور جویب التمام کو محسوب کرنے کا ایک جدید تر طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرنے کا ہے؛ اگر ہم رکھیں لا = $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}$ تو

$$\text{جب } (۹۰ \times \frac{۱}{۴}) = (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) - (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) - (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) \dots$$

جم (۹۰ × $\frac{1}{10}$) = ۱ - $\frac{1}{10}$ + ($\frac{1}{10}$ × $\frac{1}{10}$) + $\frac{1}{10}$ - ($\frac{1}{10}$ × $\frac{1}{10}$) + -

اس طرح ہیں حاصل ہوتے ہیں ضابطے

۱	۱۵۵۰۰۰۰	۶۳۲۶۰	۹۳۸۹۶	۶۱۹۲۳	۱۳	جب (۹۰ × $\frac{1}{10}$) =
۲	۰۰۰۰۰۰۰	۳۰۹۰۵	۰۶۲۴۶	۲۵۳۶۵	۵۸	-
۳	۰۰۰۰۰۰۰	۲۶۲۶۲	۴۶۱۶۶	۰۳۵۱۲	۰۵	+
۴	۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۵۸۱	۳۵۳۱۸	۶۸۸۱۰	۰۰	-
۵	۰۰۰۰۰۰۰	۰۳۴۱۱	۸۴۰۸۰	۳۵۹۸۲	۱۹	+
۶	۰۰۰۰۰۰۰	۳۵۹۸۸	۴۳۲۳۵	۲۱۲۰۸	۵۳	-
۷	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۵۶۹	۲۱۰۲۹	۲۱۹۶۰	۹۳	+
۸	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۶۸۸۰۳	۵۱۰۹۸	۱۱	-
۹	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۶۰۶۶	۹۳۵۰۳	۱۱	+
۱۰	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۲۰	-
۱۱	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۲۵۰۱۲	۲۳	+
۱۲	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۳۹	-
۱۳	۰۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۵۲	+

لوکارتمی جدولیں

یہ

۱۰۹۔ جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہو جائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی مصوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملے گا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں ۱۰ جمع کرو تو متناظر جدولی لوکارتم مل جاتا ہے۔ لوکارتمی ماس رشتہ $ل م س = ۱۰ + ل جب ۱ - ل جم ۱$ کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی ماسوں کی ایک جدول تیار ہو سکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور ماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰۔ مثلثی جدولیں، طبعی یا لوکارتمی، بموجب ذیل بنائی جاتی ہیں۔
(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰ کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے متجاوز مقداروں کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔
(۲) ان جدولوں سے صفر سے ۹۰ تک اور ۹۰ سے ۹۰ تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراءت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام جیب، جیب التمام، ماس اور نیز درجے ($۹۰ - م$) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں اور متناظر دقیقے اور ثانیے دائیں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں؛ زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں؛ نیز جیب التمام، جیب، ماس التمام اور درجے ($۹۰ - م$) صفحہ کے پائین پر ان ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں۔

(146)

دارجے

۱	۲	عالم التمام	فرق	مکس	فرق	جیب التمام	فرق	جیب	۳	۴
۱۰	۰	۰۰۲۵۳۹۸	۴۲۲	۹۵۰۰۰۴۶۰۲	۶۸	۹۵۰۰۰۸۶۱۴۸	۶۵۵	۹۵۰۰۰۴۸۶۰۴	۰	۵۰
۵۰	۵۰	۰۰۴۹۲۴۶۰۶	۴۲۲	۹۵۰۰۰۵۳۲۴	۶۸	۹۵۰۰۰۸۶۰۸۰	۶۵۳	۹۵۰۰۰۴۸۶۱۴۰۴	۱۰	
۴۰	۴۰	۰۰۴۹۲۴۹۵۴	۴۲۲	۹۵۰۰۰۵۶۰۴۶	۶۸	۹۵۰۰۰۸۶۰۱۲	۶۵۳	۹۵۰۰۰۴۸۶۲۰۵۸	۲۰	
۳۰	۳۰	۰۰۴۹۲۴۳۳۲	۴۲۲	۹۵۰۰۰۵۶۰۶۸	۶۴	۹۵۰۰۰۸۵۹۴۲	۶۵۲	۹۵۰۰۰۴۸۶۲۰۶۲	۳۰	
۲۰	۲۰	۰۰۴۹۲۳۵۱۰	۴۲۲	۹۵۰۰۰۵۶۰۹۰	۶۸	۹۵۰۰۰۸۵۵۰۰	۶۵۲	۹۵۰۰۰۴۸۶۲۳۶۶	۴۰	
۱۰	۱۰	۰۰۴۹۲۱۰۰۸	۴۲۱	۹۵۰۰۰۵۶۰۱۲	۶۸	۹۵۰۰۰۸۵۵۰۰۹	۶۵۲	۹۵۰۰۰۴۸۶۲۰۰۲	۵۰	
۹	۰	۰۰۴۹۲۱۰۰۶۰	۴۲۲	۹۵۰۰۰۵۶۰۳۳	۶۸	۹۵۰۰۰۸۵۰۰۰۱۲	۶۵۲	۹۵۰۰۰۴۸۶۲۰۰۴	۰	۵۱

۲ درجے									
۵۰	۰.۳۳۵	۰.۳۳۹	۰.۳۴۳	۰.۳۴۷	۰.۳۵۱	۰.۳۵۵	۰.۳۵۹	۰.۳۶۳	۰.۳۶۷
۴۰	۰.۳۶۳	۰.۳۶۷	۰.۳۷۱	۰.۳۷۵	۰.۳۷۹	۰.۳۸۳	۰.۳۸۷	۰.۳۹۱	۰.۳۹۵
۳۰	۰.۳۹۵	۰.۳۹۹	۰.۴۰۳	۰.۴۰۷	۰.۴۱۱	۰.۴۱۵	۰.۴۱۹	۰.۴۲۳	۰.۴۲۷
۲۰	۰.۴۲۷	۰.۴۳۱	۰.۴۳۵	۰.۴۳۹	۰.۴۴۳	۰.۴۴۷	۰.۴۵۱	۰.۴۵۵	۰.۴۵۹
۱۰	۰.۴۵۹	۰.۴۶۳	۰.۴۶۷	۰.۴۷۱	۰.۴۷۵	۰.۴۷۹	۰.۴۸۳	۰.۴۸۷	۰.۴۹۱
۰	۰.۴۹۱	۰.۴۹۵	۰.۴۹۹	۰.۵۰۳	۰.۵۰۷	۰.۵۱۱	۰.۵۱۵	۰.۵۱۹	۰.۵۲۳
۵۰	۰.۵۲۳	۰.۵۲۷	۰.۵۳۱	۰.۵۳۵	۰.۵۳۹	۰.۵۴۳	۰.۵۴۷	۰.۵۵۱	۰.۵۵۵
۴۰	۰.۵۵۵	۰.۵۵۹	۰.۵۶۳	۰.۵۶۷	۰.۵۷۱	۰.۵۷۵	۰.۵۷۹	۰.۵۸۳	۰.۵۸۷
۳۰	۰.۵۸۷	۰.۵۹۱	۰.۵۹۵	۰.۵۹۹	۰.۶۰۳	۰.۶۰۷	۰.۶۱۱	۰.۶۱۵	۰.۶۱۹
۲۰	۰.۶۱۹	۰.۶۲۳	۰.۶۲۷	۰.۶۳۱	۰.۶۳۵	۰.۶۳۹	۰.۶۴۳	۰.۶۴۷	۰.۶۵۱
۱۰	۰.۶۵۱	۰.۶۵۵	۰.۶۵۹	۰.۶۶۳	۰.۶۶۷	۰.۶۷۱	۰.۶۷۵	۰.۶۷۹	۰.۶۸۳
۰	۰.۶۸۳	۰.۶۸۷	۰.۶۹۱	۰.۶۹۵	۰.۶۹۹	۰.۷۰۳	۰.۷۰۷	۰.۷۱۱	۰.۷۱۵

جن میں صفحہ کی پیشانی پر جیب، جیب التمام، ماس لکھے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے ستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوتے ہیں جو قبل الذکر زاویوں کے مکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ موخر الذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے طور پر اوپر کیلٹ (Callet) کے سات ہندی لوکار تہی جدولوں کے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثلاً جس ستون کے سرے پر جیب التمام لکھا ہے اس کی تیسری سطر سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ۸۶.۰۱۲، ۹۹.۹، زاویہ ۵۰.۵۰۹ کی جدولی لوکار تہی جیب التمام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، مکمل زاویہ ۲۷.۹۲ کی لوکار تہی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکار تہی جیب اور ماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکار تہی جیب التمام اور ماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱۔ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی مقدار دو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعل کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کرینگے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکار تہی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے متناسب ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ۴ ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰ کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی (147)

قیمت اور اس سے بقدر ما بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق $\frac{1}{2}$ عہ ہوگا؛ زاویہ میں α اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ $\frac{1}{2}$ عہ ہے اور اس لیے زاویہ میں α ($\alpha > 0$) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ $\frac{1}{2}$ عہ کی وہ کسر ہے جو α کو 10 کے ساتھ ہے، یعنی $\frac{1}{2}$ عہ۔ کیبلٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصل نوکارتوں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اس ستون میں دیے گئے ہیں جس کے سرے پر "فرق" لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہیں ۱۱ جب ۱۰۳ کی قیمت معلوم کرنی ہے،
جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

لجب ۱۰۵۱ = ۳۲۸ ۴۵ ۳۸ ۹۵

لجب ۱۰ ۵۱ = ۲۰ ۶۵ ۹۸ ۲ = ۹۵

فرق = ۶۵۴

تب $\frac{2}{3} \times 65 = 93\frac{1}{3}$ ، اس لیے پہلے لوکارم میں ہیں ۱۹۶۰۰۰۰
جمع کرنا چاہیے ، اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

مل جب ۱۰۵۱۳ = ۲۲۵۵۸۴۹

نیز فرض کر دو کہ ہیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جد دلی لوکار تہی
ماس ۲۲۰۸۲۰۵۰۹۵ ہے۔ جد دل میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکار تم
ذیل کے دو لوکار تموں کے درمیان واقع ہے۔

مس ۱۷۱۵ = ۱۸۸۵

ل مس ۱۶ ا ۵۰ = ۹۵۰۸۲۵۴۰

فرق = ۷۲۱

دیے ہوئے کوکارتھی ماس اور جدول سے حاصل شدہ پہلے کوکارتھی ماس کے درمیان فرق ۲۱۳ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۱۹° $۱۵'$ میں جمع کرنا ہوگا $۲۱۳ \times ۱۰ = ۲۱۳۰$ (تقریباً) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۱۹° $۱۵'$ $۳۴''$ تقریباً۔

مقنا سب اجزاء کا اصول

۱۱۲ — اب ہم اس امر کی تحقیق کر شکے کہ تناسب اضافہ کا اصول جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں چمک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعبیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی طبعی یا لوکارتی تفاعل تعبیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتا سکتے کہ اگر وہ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لائیں جمع کیا جائے تو

$$f(l+a) - f(l) = f(l) + f(a) - f(l)$$

جہاں ف (لا) کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور میں وہ تفاعل ہے جو محمد و د
رہتا ہے جبکہ وہ =

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مہ کافی چھوٹا ہو تو لاکھ ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ن (لا + ہ) - ف (لا) ہ کے تناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم مہ اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اُس تعداد تک جو جدول میں درج ہے اثر انداز نہ ہوگا۔
پس لاکھ ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

ف (لا + هـ) - ف (لا)

اعشار کے مفات کی جدول تعداد تک مستقل ہے۔ تاہم دوستی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں۔

(۱) اگر لا ایسا ہو کہ ف (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے۔ لہذا اس رتبہ کے جو جدوں میں درج ہے؛ تب فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) کو ناقابلِ قدر (Insensible) کہتے ہیں اور

اس صورت میں ف (لا) کی دو یا زیادہ متصلہ جدولی قیمتیں ایک ہی ہو سکتی ہیں۔
(۲) اگر لا ایسا ہو کہ بمقابلہ ف (لا) کے اس بڑا ہے تو ممکن ہے
کہ رقم ھ اس بمقابلہ ف (لا) کے چھوٹی نہ ہو؛ اس صورت میں
فرق ف (لا ھ) - ف (لا) ھ کے متناسب نہیں ہے اور اس کو
ہم بے قاعدہ کہیں گے۔

ہے لیکن ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح خاص ترکیبوں سے یہ مشکلات رفع ہوتی ہیں۔

ٹیلر کے مسئلہ سے جس سے طالب علم واقف ہے یہ معلوم ہو چکا کہ سندھ
بالا ضابطہ ٹیلر کے مسئلہ

$$ف(لا+م) = ف(لا) + م(ف(لا)) + \frac{1}{p} م(ف(لا+م))$$

کی خاص صورت ہے جس میں ط، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے، پس
 $\text{ص} = \text{ف} + (\text{لا} + \text{ط} + \text{ه})$ اور $\text{ف} = (\text{لا} + \text{ه})$ - $\text{ف} = \text{ف} + (\text{لا})$ مان لینے سے
 جو خطا ہوتی ہے وہ $\frac{1}{2}$ ف + ف (ی) کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان واقع ہے
 جو وہ عدد دی = لا اور ی = لا + ہ کے درمیان اختیار کرتا ہے۔

۱۱۱ — اول فرض کرو کہ ف (لا) = جب لا

تو جب (لا + ج) = جب لا ج م + ج م لا ج م

یا جب (لا + x) - جب لا = جم لا (۱ - ۱/۴ + ۱/۲۵ + ...) - جب لا (۱/۲ - ۱/۳ + ۱/۴ - ۱/۵ + ...)

مجم لا + جب لا + کی اعلیٰ قوتیں

اس صورت میں ف (لا) = جم لا اور م کی تقریبی قیمت = $\frac{1}{4}$ جب لا

پس جب (لا + هـ) - جب لا = هـ جم لا - $\frac{1}{4}$ هـ جب لا (۱)
فرق کی تقریبی مساوات ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ تقریبی طور پر

ج.م (ل + م) - ج.م ل = م جب ل - $\frac{1}{7}$ م ج.م ل (۲)

$$\text{نیز } \text{مس (لا + ه) - مس لا} = \frac{\text{جب ه}}{\text{جم لا جم (لا + ه)}} \dots\dots$$

$$= \frac{\text{جم لا - ه جب لا جم لا}}{\text{جم لا}}$$

یا تقریبی طور پر

$$\text{مس (لا + ه) - مس لا} = \text{ه قطا}^۲ \text{ لا + ه}^۲ \text{ قطا}^۲ \text{ مس لا} \dots\dots (۳)$$

$$\text{نیز } \text{ل جب (لا + ه) - ل جب لا} = \text{لوک} \frac{\text{جب (لا + ه)}}{\text{جب لا}} \quad (149)$$

$$= \text{لوک} \left(۱ - \frac{۱}{۲} \text{ه} + \frac{۱}{۲} \text{ه مم لا} \right)$$

$$\text{یا } \text{ل جب (لا + ه) - ل جب لا} = \text{ه مم لا} - \frac{۱}{۲} \text{ه}^۲ \text{ قما}^۲ \text{ لا} \dots\dots (۴)$$

$$\text{اسی طرح ل جم (لا + ه) - ل جم لا} = \text{ه مس لا} - \frac{۱}{۲} \text{ه}^۲ \text{ قطا}^۲ \text{ لا} \dots\dots (۵)$$

$$\text{ل مس (لا + ه) - ل مس لا} = \frac{\text{ه}}{\text{جب لا جم لا}} - \frac{۱}{۲} \text{جم}^۲ \text{ لا} \dots\dots (۶)$$

ہر صورت میں ہم نے س کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے۔ یعنی ہم نے وہ رقیں چھوڑ دی ہیں جن میں ه کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں شامل ہوتی ہیں۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ه کافی چھوٹا ہے تو فرق، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو نہ چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ه کے تناسب ہیں۔ حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) فرق، جب (لا + ه) - جب (لا) ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ه جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ ہا جب لا، ه جم لا کے ساتھ مقابلہ نہیں ہو سکتا ہے۔

(۲) فرق، جم (لا + ه) - جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔

(۳) فرق، مس (لا + ہ)۔ مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں 2 قسطاً لا مس لا، 2 قسطاً لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۴) فرق، ل جب (لا + ہ)۔ ل جب لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا چھوٹا ہو اور ناقابل قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۵) فرق، ل جم (لا + ہ)۔ ل جم لا، ناقابل قدر اور بے قاعدہ ہے جبکہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۶) فرق، ل مس (لا + ہ)۔ ل مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔
یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق ناقابل قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔

تقرب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک متناسب اجزاء کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ سہ کی اصلی قیمت پر غور کیا جائے؛ جب (لا + ہ)۔ جب لا کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے۔ $\frac{1}{2}$ جب (لا + ہ) جہاں طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول ۱۰ کے دقتوں پر بنائی گئی ہے تو $\frac{1}{2}$ ہ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے $\frac{1}{6} \left(\frac{31.0}{18 \times 60 \times 60} \right)$ یا $\frac{1}{6} (5.00005)$ ؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے

آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ مس (لا + ہ)۔ مس لا کی صورت میں (150) خطا ہے

(5.00005) 2 قسطاً (لا + طہ) مس (لا + طہ)

پس اگر مس لا 2 لا = ۴۰ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع

کر گئی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خط نہ ہوگی
اگر لا < ڈ۔

۱۴۔ جب ایک تفاعل کے فرق اعشاریہ کے اتنے مقامات
تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں، ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے
یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم
اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں
استعمال نہیں کر سکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت
سے لامتین نہیں کر سکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں
کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لامتین نہیں کر سکتے۔ جب ایک تفاعل کے
فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو متناسب اجزاء کا ذکر وہ بالا
تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی تعیین کے لیے کافی نہیں ہے اور نہ
زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی تعیین کے لیے کافی ہے؛ مثلاً تقرب ناقابل
قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو

ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،

ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی اور

ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر
نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جاسکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک
دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہو سکے یا ایک دیے ہوئے
زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکے۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے
وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی
ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۱۰ کے قریب کے چند
زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال
کر سکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں تناسب اجزاء کا اصول استعمال کر سکتے ہیں۔

(۲) ولیمبر کا طریقہ

اس طریقہ میں L جب L یا l مس L کو ایسی دور رقموں کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق ناقابل قدر ہوتے ہیں L کی اُن قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے، اور دوسری رقم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ ان رقموں میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق ناقابل قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ N کا دائری ناپ L ہو تو

$$L \text{ جب } N = \left(\text{لوک جب } L + L \right) + \text{لوک } N,$$

$$(151) \quad L \text{ مس } N = \left(\text{لوک مس } L + L \right) + \text{لوک } N,$$

جہاں L کا دائری ناپ ہے۔

$$\text{اب } \text{لوک } (N + L) - \text{لوک } N = \text{لوک } \left(1 + \frac{L}{N} \right)$$

$$= \frac{L}{N} + \frac{L^2}{2N^2} + \dots$$

اس لیے لوک N کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر L بمقابلہ N کے چھوٹا ہو۔ نیز لوک $\text{جب } L$ لوک $\text{مس } L$ کے لیے فرق ناقابل قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک جب } (L + L) - \text{لوک جب } L = \text{لوک جب } (L + L) - \text{لوک } L$$

$$= \frac{L}{L} + \frac{L^2}{2L^2} - \frac{L}{L} = \frac{L^2}{2L^2}$$

$$= \frac{L}{L} + \left(\frac{L}{L} - \frac{1}{L} \right) \frac{L^2}{2} = \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L^2} \right)$$

اور $\frac{\text{لوک مس } (لا + ۵۵)}{لا + ۵۵} - \frac{\text{لوک مس } لا}{لا}$

$$= ۵۵ - \left(\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا} \right) + \frac{۵۵}{۲} - \left(\frac{۳}{۵۲} + \frac{۱}{۵۲} \right)$$

ان میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ ۵۵ کا سر چھوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔

اگر لوک جب لا + ل + ۵۵، لوک مس لا + ل + ۵۵ کی قیمتوں کی جدولیں راج کے پہلے چند درجوں تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو عددوں کے طبعی لوکارتموں کی جدولوں کے ساتھ ان کو ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں جبکہ ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہو، یا بالعکس۔

اگر ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت معلوم کرو؛ پھر جدول سے لوک جب لا + ل + ۵۵ یا لوک مس لا + ل + ۵۵ کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب لوک ن اس قیمت

ل جب ن۔ (لوک جب لا + ل + ۵۵)

ل مس ن۔ (لوک مس لا + ل + ۵۵)

(152) سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک معلوم کر لیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک جب لا + ل + ۵۵ کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب ن کو مضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۳) میا سکلین (Maskelyne) کا طریقہ۔

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھوٹا زاویہ ہو تو

$$\text{جب لا} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = (1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} = \text{جم لا، تقریباً}$$

اس لیے لوک جب لا = لوک لا + ۱/۴ لوک جم لا

اب چونکہ لا ایک چھوٹا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق ناقابل قدر ہیں؛ اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر لا دیا گیا ہے تو ہم طبعی لوکار تھوں کی جدول سے لوک لا ٹھیک ٹھیک معلوم کر سکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ سے لوک جب لا ل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا - ۱/۴ لوک جم لا سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ضابطہ ذیل میا سکیں گے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔

$$\text{لوک جب باط} = \text{لوک ط} - \frac{1}{8} \text{لوک جم ط} + \frac{1}{8} \text{لوک جم پے}$$

لوکار تھی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو

موزوں بنانا

۱۱۵۔ کسی جگہ کو ایسی شکل میں تحويل کرنے کے لیے کہ لوکار تھوں

کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جاسکیں ایسے ابدال

عمل میں لانے چاہئیں جو دیے ہوئے جلوں کو سادہ جلوں کے حاصل ضرب میں تحویل کر دیں؛ یہ عمل ایک یا زیادہ معادن زاویوں کے ذریعہ اکثر ہو سکیگا مثلاً دیکھو امثلہ ذیل:-

$$(۱) \overline{ما} \overline{لا} \overline{ب} = \overline{لا} \overline{قط} \overline{ف} \text{ جہاں مس نہ} = \frac{\overline{ب}}{\overline{لا}}$$

پس $\text{لوک } \overline{ما} \overline{لا} \overline{ب} = \overline{ب} = ۲ \text{ لوک } \overline{لا} + \overline{پ} \text{ (لی قط ف۔ ۱۰)}$

جہاں $\text{لی مس نہ} = ۱۰ + ۳ \text{ (لوک ب۔ لوک لا)}$

اس طرح $\overline{ما} \overline{لا} \overline{ب}$ کو کارتی جدولوں کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے اگر نہ

پہلے ان جدولوں سے معلوم کر لیا گیا ہو۔

$$(۲) \text{لوک جم ع} + \text{ب جب ع} = \text{لوک جم (ع۔ ف)} \text{ قط ف جہاں مس نہ} = \frac{\overline{ب}}{\overline{لا}}$$

(158)

پس $\text{لوک (لوک جم ع} + \text{ب جب ع)} = \text{لوک لا} + \text{لی جم (ع۔ ف۔ لی جم نہ)}$

جہاں $\text{لی مس نہ} = ۱۰ + \text{لوک ب۔ لوک لا}$

سے معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۶۔۔۔ دو درجی مساوات کی اصلیں عدداً محسوب کرنا جبکہ اصلیں

حقیقی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات $\overline{لا} + \text{ب لا} = \text{ج}$ ہے اور اول فرض کرو

کہ $\overline{لا}$ اور ج دونوں مثبت ہیں۔ اب مساوات $\text{مس ط۔ ۲} \text{ ق م ط۔ ۲} \text{ مس ط۔ ۱} =$

پر غور کرو اور فرض کرو $\overline{لا} = \overline{ما} \overline{لا} \overline{ب}$ تو $\overline{لا}$ کی مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\overline{ما} + \text{ب لا} = \overline{ما} \overline{لا} \overline{ج} + ۱ =$$

پس اگر جب $\text{ط۔ ۲} = \overline{ما} \overline{لا} \overline{ج}$ ب تو $\overline{ما}$ کی دو درجی مساوات وہی ہوگی

جو۔ مس ط کی ہے جس کی اصلیں۔ مس ط۔ مم ع ہیں۔ پس دیے

ہوئے دو درجی کی اصلیں ہیں

وہ شرط کہ کبھی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یہ ہے کہ جب ۳ طے ۱
ہم کسی آئندہ باب میں دو خیالی اصولوں والی کبھی مساوات کی اصلیں
دریافت کرنے کا طریقہ بیان کریں گے۔

وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجی اور کبھی مساواتوں کو حل
کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو درجی مسئلے فی الواقعہً ان ہندسی مسئلوں کے
مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنصیف و تثلیث سے متعلق ہیں۔
اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجی مساوات صرف پٹری اور پرکار
کی مدد سے تریسی طور پر حل کی جاسکتی ہے لیکن کبھی مساوات ان کی مدد سے
تریسی طور پر بالعموم حل نہیں ہو سکتی کیونکہ یہ آئے ایک زاویہ کی تثلیث کے
ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔



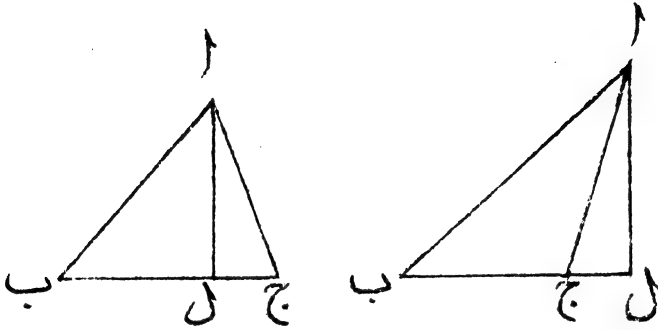
(155)

دسوال باب

مثالث کے ضلعوں و زواویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زواویوں پ ا ج، ا ب ج، ا ج ب کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف پ، ا، ب، ج سے تعبیر کریں گے اور ضلعوں پ ا ج، ا ب ج، ا ج ب کے طویلوں کو علی الترتیب چھوٹے حروف ا، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کریں گے جو مثلث کے ضلعوں، ا، ب، ج کو زواویوں کے دائری تقاطعوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ ان ضابطوں سے ان طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو ان مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزا دیے جاتے ہیں۔

۱۱۹۔ نظموں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پر ب ا، ا ج کے نظموں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پر ا کے ایک عمود پر ان کے نظموں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرتے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ج بناتی ہے اس لیے



$$\text{ب.ا.جم} + \text{ب.ا.ج.جم} = \text{ا.ج.جم} = \text{ا.}$$

$$\text{ج.جم} + \text{ب.ب.جم} = \text{ب.ب.جم} = \text{ب.}$$

$$\text{ب.ا.جم} - \text{ا.ج.جم} = \text{ب.ج.جم} = \text{ج.}$$

$$\text{ج.جم} - \text{ب.ب.جم} = \text{ب.ج.جم} = \text{ج.}$$

یا
اور
یا

$$\text{جس کو لکھا جاسکتا ہے} \quad \frac{\text{ب}}{\text{ج.جم}} = \frac{\text{ج}}{\text{ب.جم}} \quad (158)$$

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے عمودوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں ان کو اور محصلہ بالا رشتوں کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ا.} = \text{ب.جم} + \text{ج.جم} = \text{ا.ج.جم} \\ \text{ب.} = \text{ج.جم} + \text{ا.جم} = \text{ب.ب.جم} \\ \text{ج.} = \text{ا.جم} + \text{ب.جم} = \text{ج.ب.جم} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{ب.جم}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج.جم}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا.ج.جم}} \quad (2)$$

مساواتوں (۲) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث

کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے تناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰۔ رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:-
 مثلث ۱ ب ج کا حاکم دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر r ہے، تب ضلع ب ج = $2 \times r$ دائرہ کا نصف قطر \times اس زاویے کے نصف کی جیب جو ب ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنی ب ج = $2r$ جب ۱ یا $2r$ جب (۱۸۰-۱۲۰)

پس ۱ = $2r$ جب ۱

اسی طرح ب = $2r$ جب ب

اور ج = $2r$ جب ج

اس لیے $\frac{1}{\text{جب } ۱} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}} = 2r$

رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں

کو شکل

۱۔ ب جم ج - ج جم ب = ۰

۲۔ ج جم ج + ب - ج جم ۱ = ۰

میں رکھنے سے ہم ۱ ب ج کی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{جم ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب} + \text{ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم ج} + \text{ب} + \text{ج}}$$

$$\frac{1}{\text{جم ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب} + \text{ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم ج} + \text{ب} + \text{ج}}$$

$$\frac{1}{\text{جم ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب} + \text{ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم ج} + \text{ب} + \text{ج}}$$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\frac{1}{\text{جم ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب} + \text{ج} + \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم ج} + \text{ب} + \text{ج}}$$

اس لیے \angle جیب جیب $\sin C + \sin B = \sin C + \sin B = \sin C + \sin B$
 جو رشتوں (۱) میں سے پہلا رشتہ ہے۔ بالکل اسی طرح دیگر دو رشتے اخذ کیے
 جاسکتے ہیں۔

اگر ہم (۱) کی تین مساواتوں سے \angle ب $\sin C$ کو ساقط کریں تو ہمیں رشتہ
 حاصل ہوتا ہے

$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin A + \sin C = 2 \sin A + \sin C = 2 \sin A + \sin C$
 جو مثلث کے زاویوں کی جیب التماموں کے درمیان درست رشتہ ہے۔

۱۲۱ — اگر ہم مساواتوں (۱) کو علی الترتیب \angle ب $\sin C$

(157)

سے ضرب دیں اور پھر انہیں جمع کریں

تو $\sin A + \sin B = 2 \sin A + \sin C$
 جس سے ایک زاویے کی جیب التمام کے لیے ضلعوں کی رقوم میں
 ایک جملہ حاصل ہوتا ہے؛ اس ربط کو مع \angle آن دور ربطوں کے جو ہم ب
 اور $\sin C$ کے لیے ہیں اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle = \sin A + \sin B - 2 \sin C \text{ جم } ۱ \\ \sin A = \sin C + \angle - 2 \sin B \text{ جم } ۲ \\ \sin B = \sin C + \angle - 2 \sin A \text{ جم } ۳ \end{array} \right. \dots \dots \dots (۳)$$

۱۲۲ — ہم ان رشتوں (۳) کو اقلیدس جلد دوم مسائل ۱۲ اور ۱۱

کی مدد سے بالراست اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر \angle ب $\sin C$ پر عمود ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin A = \sin C + \angle - 2 \sin B \times \sin C$$

جبکہ زاویہ ج حادہ ہو، اور

$$\sin A = \sin C + \angle - 2 \sin B \times \sin C$$

جبکہ زاویہ ج منفرجہ ہو۔ پہلی صورت میں

$$\sin C = \angle - \sin A$$

اور دوسری صورت میں

$$\text{ج ل} = \text{اج جم} (180 - \text{ج}) = -\text{اج جم ج}$$

اس لیے ہر دو صورتوں میں

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\text{ا ب جم ج}$$

رشتوں (۳) سے (۲) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{جم} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\text{ا ب ج}}$$

$$\text{اس لیے جبا} = \frac{\text{ا}^2 \text{ببا ج} - (\text{ببا ج} - \text{ا}^2)(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2)}{2\text{ا ب ج}} = \frac{2\text{ا}^2 \text{ب ج}}{2\text{ا ب ج}}$$

$$\text{یا جبا} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} - \text{ج})}{2\text{ا}^2 \text{ب ج}}$$

پس ا سے تقسیم کرنے سے جبا $\frac{1}{2}$ حسب ذیل قشاکل جملے کے مساوی ہے

$$\frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} - \text{ج})}{2\text{ا}^2 \text{ب ج}}$$

$$\text{اس لیے جبا} = \frac{\text{جبا} \text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{جبا} \text{ج}}{\text{ا}^2}$$

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو جمع تقسیم کرو اور پھر انہیں جمع کر دو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}} = \text{ج}^2 + \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ج}} - 2(\text{ب جم} + \text{ا جم ب})$$

$$\text{یا ج} = \text{ب جم} + \text{ا جم ب}$$

۱۲۳ — ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{جبا} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) \quad \text{جم} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$$

اس لیے

$$\text{جب } \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{ب^2 + ج^2 - ل^2}{۲ ب ج} - ۱ \right)$$

$$\text{جم } \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{ب^2 + ج^2 - ل^2}{۲ ب ج} + ۱ \right)$$

$$\text{یا جب } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \frac{(ل + ب - ج)(ل - ب + ج)}{۴ ب ج}$$

$$\text{جم } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \frac{(ل + ب + ج)(ل - ج - ب)}{۴ ب ج}$$

اب فرض کرو ۲س = ل + ب + ج تو ۲(س - ل) = ب + ج - ل اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \frac{(س - ب)(س - ج)}{۲ ب ج} \quad \text{جم } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \frac{س(س - ل)}{۲ ب ج} ;$$

$$\text{اس لیے جب } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \left\{ \frac{(س - ب)(س - ج)}{۲ ب ج} \right\} \quad \text{جم } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \left\{ \frac{س(س - ل)}{۲ ب ج} \right\}$$

$$\text{مس } \frac{1}{4} = ۱ \frac{1}{4} = \left\{ \frac{(س - ب)(س - ج)}{س(س - ل)} \right\} \dots \dots \dots (۴)$$

ان ضابطوں کے ذریعے زاویوں کے تفاعل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت ضابطوں (۳) کے، کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوکار تہی اعمال حساب کے لیے سوزوں بنایا جاسکتا ہے۔

$$۱۲۴۔ \text{چونکہ } \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جب ب}} \quad \text{اس لیے}$$

$$\frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{ل}} \quad \text{یا} \quad \frac{۲ \text{ جب ب} \pm \text{جب ج}}{۲ \text{ جب ب} \pm \text{جب ج}} = \frac{۲ \text{ جب ب} \pm \text{جب ج}}{ل}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج})} \text{ اور}$$

$$\frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج})} ،$$

$$\text{یا } \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})} = \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج})} ، \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})} = \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج})} \dots (۵)$$

اس لیے عمل تقسیم سے ضابطہ حاصل ہوتا ہے

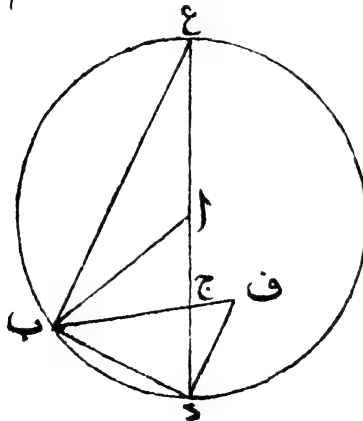
$$\text{مس} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \text{ مم} \frac{1}{2} \dots \dots \dots (۵)$$

ان ضابطوں کو ہندسی طور پر ثابت کرنے کے لیے مرکز ا اور نصف قطر اب کے ساتھ ایک دائرہ کھینچو جو ا ج کو د اور ع پر قطع کرے، د ف، ب ع کے متوازی کھینچو، تب

$$\text{ج ع} = \text{ب} + \text{ج} ، \text{د ج} = \text{ج} - \text{ب} ، \text{د ع} = \text{ب} = \frac{1}{2} \text{ا} ، \text{اور}$$

$$\text{د ب} = \text{ج} + \frac{1}{2} \text{ا} - ۹۰ = \frac{1}{2} \text{ج} - \frac{1}{2} \text{ب} ، \text{اب چونکہ}$$

$$\text{ج} > \text{ب} \text{ جب ب ا ، یا } \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})}{\text{جم} \frac{1}{2} \text{ا}}$$



$$\begin{aligned} \text{اور نیز } \frac{\frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج}}{\frac{1}{2} \text{ ج} - \frac{1}{2} \text{ ب}} &= \frac{\frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ ع}}{\frac{1}{2} \text{ ج} - \frac{1}{2} \text{ ع}} = \frac{\frac{1}{2} \text{ ع} + \frac{1}{2} \text{ ب}}{\frac{1}{2} \text{ ع} - \frac{1}{2} \text{ ب}} = \frac{\frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ م}}{\frac{1}{2} \text{ م} - \frac{1}{2} \text{ م}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \text{ م}}{\frac{1}{2} \text{ م}} = 1 \\ \text{اس لیے } \frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ (ب-ج)} &= \frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ (ج-ب)} \end{aligned}$$

مثلث کا رقبہ

۱۲۵ — کسی مثلث کا رقبہ اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع ۱ قاعدہ ہو تو ارتفاع ب جب ج یا ج جب ب ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں حسب ذیل جملے ملینگے:-

$$\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} \times \text{ج} \times \text{ب}$$

پس مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times \text{کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب} \times \text{ان کے درمیانی زاویہ کی جیب}$

یعنی مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب ا کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنی

$$\frac{1}{2} \times (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) (\text{ج} - \text{ا} - \text{ب}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})$$

استعمال کرنے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں یہ جملہ

$$\frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) (\text{ج} - \text{ا} - \text{ب}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})$$

یا اس (س - ل) (س - ب) (س - ج) (۶)

ملاحظہ ہے۔ اسکندریہ کے ہیرو نے یہ ضابطہ تقریباً ۱۵۰ سال قبل م میں حاصل کیا تھا۔ اس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{ج - ب - ج}$$

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

(160)

۱۲۶۔ اب ہم ان رشتوں کی تحقیق کریں گے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزاء کی پیمائش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دیگر تین اجزاء اس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے، تب ان اجزاء کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوتے ہیں ان کی مدد سے ہم یہ معلوم کر سکیں گے کہ قبل الذکر اجزاء کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی موجودگی سے بعد الذکر تین اجزاء کی قیمتوں میں کیا خطائیں واقع ہوتی ہیں ہم فرض کر لیں گے کہ اضافے اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں a, b, c ہیں جن میں تین لینے ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمائش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمائش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورہ بالا ضابطوں کے

۱۔ دیکھو بال کی سرٹری آف میا تھمٹیکس صفحہ ۸ جس میں اس ضابطہ کا اصلی ہندی ثبوت دیا گیا ہے

$$ٲ = ج + ب + ا$$

$$ٲ = ا + مف + ب + مف + ب + ج + مف + ج$$

(161)

اس لیے مف + ا + مف + ب + مف + ج = ٲ (۸)
مساواتیں (۷) ایک دوسرے کے غیر تالچ نہیں ہیں جیسا کہ ان کو شکل

$$\frac{مف ب}{ب} - \frac{مف ج}{ج} = مم ب \times مف ب - مم ج \times مف ج$$

$$\frac{مف ج}{ج} - \frac{مف ا}{ا} = مم ج \times مف ج - مم ا \times مف ا$$

$$\frac{مف ا}{ا} - \frac{مف ب}{ب} = مم ا \times مف ا - مم ب \times مف ب$$

میں رکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ ان مساواتوں سے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی ایک مساوات دیگر دو مساواتوں سے افد کی جاسکتی ہے۔ پس مساواتوں (۷) میں سے کوئی دو مساواتیں مع مساوات (۸) کے چھ خطاؤں میں سے تین کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں جبکہ دیگر تین خطائیں دی گئی ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک خطا، ضلع سے متعلق ہو۔

(۷) اور (۸) سے مف ب اور مف ج کو ساقط کرنے سے ہیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے مف ا حاصل ہوتا ہے مف ب، مف ج، اور مف ا کی رقوم میں؛ اس کو ضابطہ ٲ = ب + ج + ا - ب ج - ج ا - ا ب سے بھی باراست معلوم کیا جاسکتا ہے؛ پس ہیں حاصل ہوتا ہے

ا مف ا = (ب - ج - ا) مف ب + (ج - ب - ا) مف ج + (ج - ب - ا) مف ا
یہ اور اس کے متناظر دو ضابطے رشتہ (۱) کی مدد سے ذیل کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔

یہ دور رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = \zeta = \eta = \theta = \iota = \kappa = \lambda = \mu = \nu = \xi = \omicron = \pi = \rho = \sigma = \tau = \upsilon = \phi = \chi = \psi = \omega$ کی پہلی مساوات میں α کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرف α کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں

$$2 \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + \iota^2 + \kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 + \omicron^2 + \pi^2 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \phi^2 + \chi^2 + \psi^2 + \omega^2$$

$$+ \text{جب } (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$$

ہوگا

$$\text{جم } (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$$

یعنی

یہ جیب التمام ہے زاویہ طے کی جو ضلعوں α اور β کی مثبت سمتوں کا درمیان زاویہ ہے؛ پس ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + \iota^2 + \kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 + \omicron^2 + \pi^2 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \phi^2 + \chi^2 + \psi^2 + \omega^2$$

(۱۱)

جو ضابطہ (۳) کے مثل ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = \zeta = \eta = \theta = \iota = \kappa = \lambda = \mu = \nu = \xi = \omicron = \pi = \rho = \sigma = \tau = \upsilon = \phi = \chi = \psi = \omega$ میں α اور β مساوی ہیں اور ہر ایک α سے کم ہے۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ — کثیر الاضلاع کا رقبہ جملہ

$$\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$$

یا $\frac{1}{2} \alpha$ جو α جیب طے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ مجموعہ α اور β کی تمام مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں α اور β میں سے α کو

ہمیشہ r سے بڑا فرض کریں تو زاویہ طریس حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ میں سے حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابت کرنے
 کے لیے ہم پہلے یہ دکھائینگے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ
 جملہ $\angle A, \angle B, \angle C$ جب 180° میں تحویل ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائینگے کہ اگر وہ
 (ن-۱) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ، n
 ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

مثلث $\triangle ABC$ کی صورت میں جس میں $\angle A = \angle B = \angle C$ ہیں حال ہوتا ہے

(163)

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

پس اس صورت میں جملہ $\angle A, \angle B, \angle C$ طریس

$$= \frac{1}{3} (\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$$

$$= \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ $n = 3$

اب فرض کرو کہ (ن-۱) ضلعوں

$$\angle A_1, \angle A_2, \dots, \angle A_{n-1}$$

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اس کثیر الاضلاع

کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{طریس} \times \text{جانب} = \frac{1}{2} \times \text{طریس} \times \text{جانب}$$

جس میں r اور s میں سے ہر ایک، $n-1$ سے کم ہے۔ اب ضلع $\angle A_n$ کی

جگہ دو ضلع $\angle A_1, \angle A_2$ رکھو اور اس طرح n ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع

بناؤ، تب ہیں $\angle A_1, \angle A_2, \dots, \angle A_n$ جب طریس کو رقبہ بالائیں جمع کرنا ہوگا، پس

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$$

اب ضلع کا قفل کو پر لینے سے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} = \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$$

پس جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$$

$$+ \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$$

یا $\frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ ر > س۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ ن = ۳ اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ ن = ۴ اور علیٰ ہذا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مضابطہ (۱۲) میں لو کا سر (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے؛ پس مضابطہ ہو جاتا ہے $\frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر} + \frac{1}{2} \times \text{لو} \times \text{س جب طر}$ کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ س < ر۔

دسویں باب پر مثالیں

ایک مثلث لرب ج کے لیے حسب ذیل رشتے از مثال آتا ۱۱

ثابت کرو:-

$$(۱) \quad \text{ا} \text{ب} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ب} \text{ج} (\text{ج} - ۱) + \text{ج} \text{ب} (\text{ا} - \text{ب}) = ۰$$

$$(۲) \quad \text{ا} \text{ج} \text{ا} + \text{ب} \text{ج} \text{ب} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} = \text{ا} \text{ب} \text{ج} + (\text{ا} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{ج})$$

$$(۳) \quad \text{ا} \text{ج} \text{ج} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} = \frac{\text{ج} + \text{ا}}{\text{ب}} \quad \left\{ \text{ب} + (\text{ج} - \text{ا}) \right\}$$

$$(۴) \quad \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ا} + \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ج} \text{ا} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ج} \text{ا} \text{ج}$$

$$+ \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{ج} \text{ج} (\text{ا} \text{ج} \text{ا} + \text{ب} \text{ج} \text{ب} + \text{ج} \text{ا} \text{ج}) = ۰$$

$$(۵) \quad \text{ا} \text{ج} \text{ا} (\text{ب} - \text{ج}) = \text{ب} \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ب} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج} + \text{ب} \text{ج} \text{ج} \text{ا} (\text{ب} - \text{ج})$$

$$(۶) \quad \text{ا} \text{ج} \text{ا} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ب} \text{ا} \text{ج} \text{ا} (\text{ج} - ۱) + \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ا} (\text{ا} - \text{ب}) = ۳ \text{ا} \text{ب} \text{ج}$$

$$(۷) \quad \text{ج} = \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ب} + ۲ \text{ا} \text{ب} \text{ج} \text{ا} (\text{ب} - ۱) + ۲ \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج} (\text{ب} - ۲)$$

$$+ \text{ب} \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ا}$$

$$(۸) \quad (\text{ا} \text{م} \text{ا} - \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج}) + (\text{م} \text{ا} \text{ب} - \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج} - \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج}) +$$

$$+ (\text{م} \text{ا} \text{ج} - \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج} - \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ج}) = (\text{م} \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ب} \text{ا} \text{ب} + \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج})$$

$$(۹) \quad \text{ب} \text{ا} \text{ج} - \text{ا} \text{ب} \text{ج} \text{ا} (\text{ا} + ۹) = \text{ج} + \text{ا} - ۲ \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ا} (\text{ب} + ۹)$$

$$= \text{ا} \text{ب} - ۲ \text{ا} \text{ب} \text{ج} \text{ا} (\text{ج} + ۹)$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

$$(۱۰) \quad \text{ج} \text{ا} \text{ب} \text{ج} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) : \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ب} (\text{ا} + \text{ج} + \text{ب})$$

$$= \text{ا} + \text{ج} : \text{ا} + \text{ب}$$

$$(۱۱) \quad (\text{ا} + \text{ب}) \text{ج} \text{ب} = ۲ \text{ب} \text{ج} \text{ب} (\text{ب} + \text{ا} + \text{ج}) \text{ا} \text{ج}$$

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اس کے نیم زاویوں کے ماس التام سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے مربع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کے زاویوں کے ماس سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۴) اگر ب-ا-ج، ا-ج-ب، ا-ج-ب سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب ب، جب ب، جب ب سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۵) اگر ب-ا-ج = م ج تو ثابت کرو کہ ۱ = ج-ا (م ج ۱/۲ ج) - ۱/۲ ج

$$\text{اور} \quad \frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{1 + م ج ب}{م ج ب}$$

(۱۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں ج-ا + ج-ب + ج-ج < ۱ اور ۱/۲ ج

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں ۱/۲ ب مس ۱/۲ ج + مس ۱/۲ ج مس ۱/۲ ج + ۱/۲ ج

+ مس ۱/۲ مس ۱/۲ ج > ۱ اور یہ کہ اگر ایک زاویہ دو قائمہ زاویوں کے لانتہا قریب آئے تو اس جملہ کی کم سے کم قیمت ۱/۲ ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک مثلث متساوی الاضلاع ہوگا اگر م+ا+م ب+م ج = م

(165)

(۱۹) اگر ایک مثلث میں

$$\frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{1 + م ج ب}{م ج ب}$$

$$= \frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{1 + م ج ب}{م ج ب}$$

تو ثابت کرو کہ اس کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

(۲۰) اگر ایک مثلث میں ج-ا = ج-ب ج-ج تو ثابت کرو کہ م ب م ج = ۱/۲

(۲۱) اگر ط وہ زاویہ ہو جو ج-ا = ۱/۲ سے متین ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{1 + م ج ب}{م ج ب}$$

$$\frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{1 + م ج ب}{م ج ب}$$

اور

(۲۲) اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ب وج - ۹۰)} = \frac{\text{ب و} + \text{ج و} - \text{ا و}}{۲}$$

(۲۳) - اگر ج = ب + ۱/۲ اور ب ج نقطہ پر تقسیم ہو ایسا کہ ب و وج =

$$۳:۱ \text{ تو ثابت کرو کہ } > ۱ \text{ ج و } = ۲ > ۱ \text{ ا و ج}$$

(۲۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خطوط مستقیم ج : ج ع مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع} = ۲:۱ \text{ جب ا مم نہ}$$

(۲۵) اگر ا ب کو نقاط ج، د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ب ا پ} + \text{ج ب ب پ} = ۴ \text{ جب ا پ ج جب ب پ} >$$

(۲۶) اگر ایک متوازی الاضلاع کے ضلع و، ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ

سہ ہو تو ثابت کرو کہ دتروں کا حاصل ضرب ہے ۱/۲ (و + ب) - ا - م و ب ا ج م سہ ۱/۲

(۲۷) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = طہ،

$$\text{زاویہ ج ا د} = ۲ \times \text{فہ تو ثابت کرو کہ مم طہ - مم فہ} = \text{مم ب - مم ج}$$

(۲۸) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں ع، ب میں اور ضلع ج کو

دو مقطوعوں لا، ما میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ طہ پر ٹال ہے؛

$$\text{ثابت کرو کہ لا مم ع - ما مم ب} = \text{ما مم ا - لا مم ب} = (لا + ما) مم طہ$$

(۲۹) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ

چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۹۰ کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

$$۱ + ۲۱ : ۲۱ : ۲۱ - ۱ \text{ - اسے}$$

(۳۰) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\text{ا جم ط} = \text{ب جم (ج - ط)} + \text{ج جم (ب + ط)} \text{ جس میں ط کوئی زاویہ ہے۔}$$

اگر کسی مستوی ذوالربعۃ الاضلاع کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج د کو

و ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اجب ا-ب جب (ا-ب) + ج جب (ا-ب-ج)}}{\text{اجم ا-ب جم (ا-ب) + ج جم (ا-ب-ج)}} = \text{مس ۲}$$

(۳۱) اگر ایک مثلث ا ب ج ایسا ہو کہ ایک خط مستقیم ا د جو ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے کھینچا جاسکتا ہے اس طور پر کہ د ب ا د = ۱/۲ د ب ا ج اور نیز ب د = ۱/۲ ب ج تو ثابت کرو کہ ا ب = (ب-ج) (۲) (ب+ج) (۳۲) ایک مربع کا ایک ضلع ب ج ہے اور ب ج کے عمودی ناصف پر دو نقطے پ، ق لیے گئے ہیں جو مربع کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہیں؛ ب پ، ج ق کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج میں

$$\text{مس ۲ (مس ب-مس ج)} = ۸ + ۰$$

(168)

$$\begin{cases} \text{ا ب + ی - ۲ مای جم ع} = \text{ا ج} \\ \text{ی ا + ل ا - ۲ ی لاجم ب} = \text{ب ج} \\ \text{ل ا + م ا - ۲ ل ا م جم ج} = \text{ج ج} \end{cases} \quad \text{اور} \quad \text{ع + ب + ج} = ۲$$

تو ثابت کرو کہ

(ما ی جب ع + ی لاجم ب + ل ا م جم ج) = ۱/۲ (۲ ب ج + ۲ ج ا + ۲ ا ب - ۲ ب ج ج) (۳۳) اگر ایک مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں اور لا، ما، ی حقیقی مقداریں ہوں ایسی کہ وہ مساوات

$$\frac{\text{ما جب ب - ی جب ا - لاجم ج}}{\text{لا - م جم ج - ی جم ب}} = \frac{\text{ی جب ا - لاجم ج}}{\text{ما - ی جم ا - لاجم ج}}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{ج ب ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج ب ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج ب ج}}$$

(۳۵) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ جو مساوی نصف قطر کے دائرے کے ایک قطاع میں بنایا جاسکتا ہے ۱/۲ مس ۱/۲ ع ہے جہاں ۲ ع، قطاع کا

زاویہ ہے۔

(۳۶) بناؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے 'ا' ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوط کے ساتھ زاویہ م $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے 'ا' ب، 'ج' ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں 'ع'، 'ب'، 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے حاس التماموں کی خطائیں مقداروں

قم ا (بجم ج + ججم ب - ع)، قم ب (ججم ا + اجم ج - ب)،
قم ج (عجم ب + بجم ا - ج)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمائش میں دو ضلعوں 'ا' ب میں چھوٹی خطائیں لا، م واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

۔ $(\frac{1}{2} مم ب + \frac{1}{2} مم ا)$

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے؛ اور کسی طول کے ناپنے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں ن ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمائش کردہ) ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ ہیں خطا کی انتہا جو اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۳، ۳۲، ۳۱ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذواربہ الاضلاع کے چار زاویوں کی جویوب التمام ج، ج، ج، ج، رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں۔

گیارہواں باب

(167)

مثلثوں کا حل

۳۰۔ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے یعنی اس وقت جب چھ اجزائیں سے تین اجزاء کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزاء کی مقداریں معلوم کرنے میں ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کریں گے جن کو لوکارہمتوں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر کے انجام پاسکتا ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۳۱۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، ۹۰° ہے، تب یہ زاویہ دئے ہوئے اجزائیں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو ان مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزاء دیے گئے ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع 'ا' ب دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ مس ۱ = $\frac{ب}{ا}$ سے 'ا' معلوم کیا جاسکتا ہے اور پھر ب، 'ا' کا ہم زاویہ ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز ج = $\frac{ا}{ب}$ جس سے ج معلوم ہوتا ہے جبکہ 'ا' معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے لوکارٹی ضابطے ہیں

$$ل مس ۱ = ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$ب = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$لوک ج = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

(۲) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک ضلع 'ا' دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ جب ۱ = $\frac{ج}{ا}$ کے ذریعہ 'ا' معلوم کیا جاتا ہے؛ ب، 'ا' کا متمم ہے؛ ضابطہ ب = ج جم ۱، یا ب = ج - ۱۰ سے ب معلوم ہوتا ہے۔

لوکارٹی ضابطے ہیں

$$ل جب ۱ = ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$ب = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$لوک ب = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

اور

$$لوک ب = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

یا

(۳) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک زاویہ 'ا' دیے گئے ہیں تو ب فوراً 'ا' کے متمم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ ج = $\frac{ا}{ب}$ جس سے ج معلوم ہوتا ہے اور ب پگھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

لوکارٹی ضابطے ہیں

$$لوک ج = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$ب = ۱۰ - ۱۰ - ۱۰$$

لوک ب = لوک ج + ل جم ا۔ ا۔
 لوک ب = $\frac{1}{4}$ لوک (ج + ا) + $\frac{1}{4}$ لوک (ج۔ ا) یا
 (۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ا اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛
 تب ج ہے ۹۰۔ ا ج ہے ۱۰۰ اور ب پھیلی دو صورتوں کی مانند
 معلوم ہوتا ہے۔

لوکار تہی ضابطے ہیں

$$\text{لوک ج} = \text{لوک ا۔ ل جب ا۔ ا۔}$$

$$\text{ب} = ۹۰۔ ا۔$$

$$\text{لوک ب} = \text{لوک ج} + \text{ل جم ا۔ ا۔}$$

$$\text{لوک ب} = \frac{1}{4} \text{ لوک (ج + ا) + } \frac{1}{4} \text{ لوک (ج۔ ا)}$$

۱۳۲ — بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے سہولت بخش
 نہیں تھے مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ۹۰ کے قریب ہو تو اس کو مساوی
 جب ا = $\frac{1}{2}$ سے سہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جاسکتا کیونکہ متصل
 جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں، اس لیے ہم دوسرا
 ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل
 کرتے ہیں ب مس $\frac{1}{4}$ ب = ج۔ ا۔ ب مم $\frac{1}{4}$ ب = ج + ا۔
 پس مس $\frac{1}{4}$ ب = $\frac{\text{ج۔ ا۔}}{\text{ج + ا۔}}$ اور اس طرح

$$\text{مس} (۲۵۔ ۱\frac{1}{4}) = \left(\frac{\text{ج۔ ا۔}}{\text{ج + ا۔}} \right) \frac{1}{4}$$

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعراض سے پاک ہونے کی وجہ سے ا کے معلوم
 کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

نیز صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر سہولت بخش
 ہے جبکہ ا بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج۔ ج جب ا x
 مس $\frac{1}{4}$ استعمال کر سکتے ہیں۔

ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۲)

$$\frac{۲ \text{ جب } ۲}{۲(۲ + ۲ \text{ فہ})} = \text{فہ}$$

کو جس میں تقریبی خطا $\frac{۲}{۱۸}$ فہ ہے استعمال کر دو اور رکھو $۲ \text{ فہ} =$ بہ تو یہیں ضابطہ

$$\text{حاصل ہوتا ہے بہ} = \frac{۲ \text{ ب}}{۲ \text{ ج} + ۲} \text{ اور تقریبی خطا ہے } \frac{۱}{۱۸} \text{ بہ}$$

پس ب، اس تقریبی مساوات

$$\text{ب} = \frac{۲ \text{ ب}}{۲ \text{ ج} + ۲} \times ۵۷۷۲۹۵۷۷$$

سے درجوں میں حاصل ہوتا ہے۔

غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۳۴ — مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔
ضابطوں

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} = \frac{(س - ب)(س - ج)}{۲ \text{ ب ج}}$$

$$\text{جم } \frac{۱}{۲} = \frac{(س - ب)(س - ج)}{۲ \text{ ب ج}}$$

$$\text{س } \frac{۱}{۲} = \frac{(س - ب)(س - ج)}{۲ \text{ س (س - ج)}}$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ سب ضابطے لوکارنمی عمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

مثال

ایک مثلث کے ضلع 'م'، 'ر'، 'ق' کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوکار تم دیے گئے ہوں:—

$$\text{لوکار } ۳۰.۱۰.۳۰ = ۲$$

$$\text{ل م } ۱۲ = ۳۶۱۲۹۳۲۹ \text{ ، فرق } \frac{۱}{۲} \text{ کے لیے } = ۵۹۳۰۰۰$$

$$\text{ل س } ۲۴ = ۵۰۲۸۱۰۶۵۰۹۵۶ \text{ ، فرق } \frac{۱}{۲} \text{ کے لیے } = ۳۳۹۰۰۰$$

$$\text{چونکہ س } = ۱۰ \text{ ، ل } = ۶ \text{ ، س } = ۲ \text{ ، ب } = ۳ \text{ ، ج } = ۱ \text{ ، اس لیے}$$

$$\text{م } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ ، م } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ ، م } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ ، اس طرح}$$

$$\text{ل م } \frac{۱}{۲} = ۱۰ - \frac{۱}{۲} = (۳۰.۱۰.۳۰ + ۱) \frac{۱}{۲} = ۳۶۱۲۹۳۲۹$$

$$\text{اور ل م } \frac{۱}{۲} = ۱۰ + \frac{۱}{۲} = (۳۰.۱۰.۳۰ - ۱) \frac{۱}{۲} = ۵۹۳۰۰۰$$

$$۱ \text{ معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۳۶۱۲۹۳۲۹ - ۵۹۳۰۰۰ = ۳۵۱۹۹۳۲۹$$

$$\text{اور } ۳۵۱۹۹۳۲۹ = ۶۰ \times \frac{۱۵۶}{۵۹۳} \text{ تقریباً اس لیے } \frac{۱}{۲} = ۱۲۶۳۶۵۸$$

$$۱۲۶۳۶۵۸ = ۲$$

$$\text{ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۵۹۳۰۰۰ - ۳۵۱۹۹۳۲۹ = ۲۳۴۰۰۰$$

$$\text{اور } ۲۳۴۰۰۰ = ۶۰ \times \frac{۲۳۴}{۳۳۹} \text{ تقریباً اس لیے } \frac{۱}{۲} = ۲۳۴۰۰۰$$

$$\text{ب } = ۸۰ \text{ ، ل } = ۲۲۸۰۰۰ \text{ ، نیز ج } = ۱۸۰ - ۲ = ۱۷۸ \text{ ، ب } = ۱۷۸ \text{ ، ج } = ۱۷۸ \text{ ، اس لیے}$$

زاویوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہو گئیں۔

۳۵۔ مثلث حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ

دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب، ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں، تب ب اور ج ضابطہ

$$\text{م } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \text{ م } \frac{۱}{۲}$$

اور ضابطہ $ب + ج = ۱۸۰ - ا$
 سے متین کیے جاسکتے ہیں۔ لوکارتی ضابطہ ہے
 $ل + م + ا = (ب - ج) = (لوک - (ب + ج) + ل + م + ا)$
 $ب$ اور $ج$ معلوم کرنے کے بعد ضابطہ $ل + م + ا$ ان تین ضابطوں
 $لوک + ل = لوک + ج + ل جب ا - ل جب ج$
 $لوک + ل + ج + ل = (ب - ج) = (لوک - (ب + ج) + ل + ج + ل + ا)$
 $لوک + ل + ل جب ا = (ب - ج) = (لوک - (ب + ج) + ل + ج + ل + ا)$
 میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
 ہم اگر اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ $ا = ب + ج - ۲$ اور $ج + م + ا$
 یعنی $ا = (ب + ج - ۲) - ۲$ اور $ب + ج + م + ا$
 اس لیے $ا = (ب + ج) - ۴$ جہاں ۴ مساوات

$$جب ا = ۲ ماب ج + ج + ا$$

(171) سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے $ا$ کو لوکارتی ضابطہ
 $ل + ج + ا = لوک + ب + ا + ل + ج + ا = لوک + ب + ل + ج + ا + ل + ج + ا$
 سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر $ا$ کو ضابطہ
 $لوک + ل = (لوک - (ب + ج) + ل + ج + م + ا) - ۱۰$
 سے۔

مثال

اگر $ا = ۱۲۳$ ، $ج = ۲۲۱$ اور $ب = ۱۶۹$ تو $ا + ج + ب$ معلوم کرو۔
 یہ دیا گیا ہے کہ

$ل جب ا = ۱۶۹$	$لوک = ۱۵۹۹۵۶۳۵۲$
$ل جب ا = ۲۲۱$	$لوک = ۱۲۳۰۸۹۹۰۵۱$
$ل جب ا = ۱۶۹$	$لوک = ۳۳۲۴۷۳۵۳۰$
$ل جب ا = ۲۲۱$	$لوک = ۳۱۳۲۷۵۴۸۶$

ہیں حاصل ہوتا ہے

$$ل \text{ مس } \frac{1}{2} (ج - ۱) = ل \text{ مم } ۱۸ + ل \text{ کوک } ۹۹ - ل \text{ کوک } ۲۲۲$$

$$۲۶۳۳۶۳۵۲ - ۱۵۹۹۵۶۳۵۲ + ۱۰۵۸۳۱۹۰۱ =$$

$$۱۰۵۲۳۲۴۶۲۳ =$$

$$\text{اب } ۱۰۵۲۳۲۴۶۲۳ - ۱۰۵۲۳۲۴۵۵۲ = ۱۰۰۰۰۱۰۱ \text{ اور } \frac{۱۰۱}{۳۸۶۲۴} =$$

$$۳۵ \text{ تقریباً ' اس لیے } \frac{1}{2} (ج - ۱) = ۵۹ \text{ } ۲۹ \text{ } ۵۹ \text{ ' نیز } \frac{1}{2} (ج + ۱) = ۶۲ \text{ } ۵۵ =$$

$$\text{اس لیے } ۱۵ = ۱۵ \text{ } ۲۲ \text{ } ۵۶۵۵ \text{ ' ج } = ۱۳۵ \text{ } ۱۲۵ =$$

$$\text{نیز کوک ب } = ۹۶۷۸۹۱۹۰۸ + ۲۵۰۸۹۹۰۵۱ - ل \text{ جب } ۱۵ \text{ } ۲۲ \text{ } ۵۶۵۵ =$$

$$\text{اور } ۹۶۷۸۹۱۹۰۸ \times ۵۶۵۵ = ۵۴۳۰۰۱۵۵ \text{ ' اس لیے ل جب } ۱۵ \text{ } ۲۲ \text{ } ۵۶۵۵ =$$

$$\text{اس لیے کوک ب } = ۲۶۳۳۶۳۵۱۲ \text{ یعنی ب } = ۲۲۲ = \frac{۱۲}{۱۹۵۶} = ۲۲۱ \text{ } ۵۹۹۲ =$$

۱۳۶۔ مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے

ایک کے مقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ 'کج' اور 'ا' دیے ہوئے اجزا ہیں تو جب ج مساوی
جب ج = ج جب اسے متین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے
کے بعد اگر ج = ا تو ج کی بالعموم دو قیمتیں ۱۸۰ سے کم ایک حادثہ
اور دوسری منفرد ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛
پس ہیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ج = ا < تو جب ج < ا جو ناممکن ہے اور اس
حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے
اجزاء رکھتا ہو۔

(۲) اگر ج = ا = تو جب ج = ا اور اس لیے ج کی صرف ایک

قیمت ۹۰ ہے۔ اگر ا > ۹۰ تو دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ ایک مثلث
موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ا < ۹۰ تو ج کی قیمت

(172)

ناقابلِ قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔
(۳) اگر ج جب ا > ا تو ج ج > ا اور اس لیے ج کی قیمتیں
ہیں ایک حادہ اور ایک منفرجہ، پس
(عد) اگر ج > ا تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ج > ا، اس لیے ج
حادہ ہونا چاہیے، اس طرح دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ صرف ایک مثلث
موجود ہوگا؛

(د) اگر ج < ا تو ج کا حادہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی
دونوں قیمتیں قابلِ قبول ہیں بشرطیکہ ا > ۹۰؛ لیکن اگر ا < ۹۰ تو دونوں
قیمتیں ناقابلِ قبول ہیں کیونکہ ج < ا اس لیے دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ
دو مثلث ہونگے اگر ا > ۹۰ اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر ا < ۹۰؛

(ج) اگر ج = ا تو ج = ا یا ۱۸۰ - ا؛ ج کی قیمت ۱۸۰ - ا کے لیے
مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت
میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنی ا رہ جاتی ہے
جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملے گا بشرطیکہ ا > ۹۰۔

ہم نتائجِ محصلہ بالا کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

اگر ج جب ا < ا، کوئی حل نہیں
ج جب ا = ا، ایک حل
ج جب ا > ا، کوئی حل نہیں
ج جب ا > ا، ایک حل
ج جب ا = ا، ایک حل
ج جب ا < ا، کوئی حل نہیں
ج جب ا < ا، دو حل
ج جب ا < ا، کوئی حل نہیں

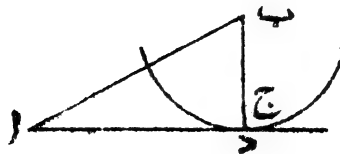
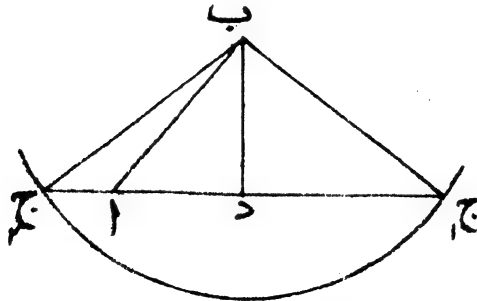
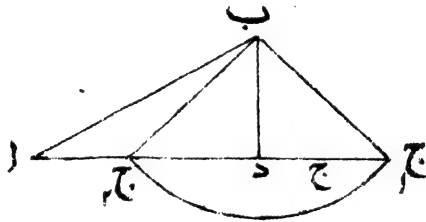
اگر ج، ۹۰ کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر
معلوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

$$\text{س ج} = \pm \frac{\text{ج جب ا}}{1 + (\text{ج جب ا}) - (\text{ج جب ا})} \text{، س } (5 + \frac{1}{4} \text{ ج}) = \pm \frac{1 + (\text{ج جب ا}) - (\text{ج جب ا})}{1 + (\text{ج جب ا}) - (\text{ج جب ا})}$$

میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔
۱۳۷۔ دفعہ ماضی میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی
ہے ان کی تحقیق ہندی طور پر کرنا سبق آموز ہو گا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا
ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر
ا > ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کرے گا اور اس لیے
دیے ہوئے اجزائے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جاسکتا؛ لیکن اگر
ا < ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرتا ہے۔
اگر ا > ج اور ا > ۹ تو ج اور ج دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں
(دیکھو شکل (۱)) اور دو مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج میں سے ہر ایک

(178)



دیے ہوئے اجزاء رکھتا ہے؛ زاویے A ، B اور C باہم متکم ہیں اگر $\angle A < 90^\circ$ تو A کے پرے ہوگا اور کوئی مثلث دیا نہیں ہوئے اجزاء کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر $\angle A > 90^\circ$ تو A کی مقابل جانبوں پر ہونگے اور صرف مثلث ABC میں دیے ہوئے اجزاء ہونگے اس آخری صورت میں مثلث ABC میں A پر کا زاویہ A کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ $180^\circ - A$ کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں کرے گا۔

اگر $\angle A = 90^\circ$ جب A تو دائرہ A کو نقطہ C پر مس کرے گا اور قائم الزاویہ مثلث ABC مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزاء ہونگے بشرطیکہ $A > 90^\circ$ ۔
یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱۱))

$$a = c \sin A \quad \text{اور} \quad c = \frac{a}{\sin A} \quad \text{اور} \quad \angle C = 90^\circ \quad \text{جب} \quad A = 90^\circ$$

اس لیے B کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

$\angle C = 90^\circ + A$ اور $\angle C = 90^\circ - A$ اور $\angle C = 90^\circ$ جب $A = 90^\circ$
یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛ B کی ان دو قیمتوں کو ہم حسب ذیل B کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

۱۳۸۔ مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے

(174)

دیے جائیں۔
فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع a ہے اور دیے ہوئے زاویے A ، B ؛
تب مساوات $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ سے B کا تین ہوتا ہے اور
غالباً

تغیر کئے گئے ہوں تو مشنوں کے حل کے لئے حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

(۱) فرض کرو کہ 'ا' ج، 'د' دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے، تب ضابطہ

$$ج = \frac{ا}{جب} \text{ سے ہیں یہ تقریبی ضابطہ}$$

$$ج = ا \text{ رقم } ۱ \{جھ - \frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ\}$$

ملتا ہے۔ نیز اگر 'ا' ج دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$ج = \frac{ا(جھ - \frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ - \dots)}{جھ - \frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ - \dots}$$

$$ج = ا \frac{جہ}{جہ} \{ا + \frac{۱}{۴} (جہ - جہ)\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ 'ا' ج، 'ا' حسب سابق دیے گئے ہیں؛ نیز فرض

کرو کہ ج تقریباً ۹۰ ہے تب ج = $\frac{ا}{جب}$ ؛ اس لیے ج = $\frac{ا}{جب}$

(۱-ا) $\frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ$ ج کو تقریبی طور پر متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

اگر 'ا' اور ج دونوں ۹۰ کے قریب ہوں تو

$$ج = \frac{ا}{جب} \text{ یا } ج = \frac{ا(۱ - \frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ - \dots)}{۱ - \frac{۱}{۴} جہ + \frac{۱}{۱۶} جہ - \dots}$$

$$ج = ا \{ا - \frac{۱}{۴} (جہ - جہ)\} \text{ اس لیے}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔
 ۴۰۔ اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دینگے جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔
 (۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمود دیے گئے ہیں؛ ان کو 'ع'، 'ع'، 'ع' سے تعبیر کرو، تب
 $ا \times ع = ب \times ع = ج \times ع =$ مثلث کے رقبہ کا دو چند۔ اب چونکہ

$$جم = ۱\frac{1}{2} = \frac{س(س-ا)}{ب \times ج}$$

$$اس لیے \quad جم = ۱\frac{1}{2} = \frac{(ع+ع+ع)(ع-ع+ع+ع+ع+ع)}{ع \times ع \times ع}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز 'ع' = ج جب 'ا' اس لیے ا معلوم ہونے کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔
 (۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھیرا دیے گئے ہیں۔ تب

$$س = س (جب ا + جب ب + جب ج)$$

پس س معلوم ہوتا ہے اور پھر اضلاع بالترتیب

$$۱ \text{ جب } ا, ۲ \text{ جب } ب, ۳ \text{ جب } ج$$

$$۱ = \frac{۲ \text{ جب } ا}{جب ا + جب ب + جب ج}$$

مع ب اور ج کی متناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$\frac{س \text{ جب } ا}{جم = ۱\frac{1}{2} \times ج}$$

میں تحویل ہوتی ہے جو لوکار تہی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ ۱ ہے، ارتفاع ع، اور دیا ہوا منفرق ج۔ ج = ۲ ع؛ تب

چونکہ ج + ج = ۱۸۰۔ ۱، اس لیے ج = ۹۰ + ع - ۱/۲ ج = ۹۰ - ۱/۲ ع۔ ۱/۲
نیز ۱ = ع (م + ج + م ج) = ع {مس (۱/۲ - ع) + مس (۱/۲ + ع)}

اس لیے ۱/ع = ۲ جب ۱، پس دو درجی مساوات

$$۱ (ج + ۱ + ج ۲) = ۲ ع (۱ - ج ۲)$$

$$ج ۲ (۱ + ج ۲) = ۲ ع (۱ - ج ۲) - ۱ ج ۲$$

سے ج ۱ حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

$$ج ۱ = ۱ - \frac{۱ ج ۲}{۱ + ج ۲} \pm \frac{۲ ع (۱ - ج ۲) + ۱ ج ۲}{۱ + ج ۲}$$

اس طرح ج ۱ کی دو قیمتیں، مسئلہ کے دو حل کے جواب میں، حاصل ہوتی ہیں۔
معیات ذیل سے شلث کو حل کرو:-

(۴) ج، ج، ۱ + ب

(۵) ب، ۱ + ب، ج

(۶) رتبہ اور زاویے

(۷) ج، ج، ۱ + ج + ب

(۸) زاویے اور ارتفاع

کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱۔ کارنٹ، لہولیر، لیکسل اور دیگر علماء ریاضی نے ان رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور ان طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو علم الکثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی ضابطے دفعہ ۱۲ میں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزاء میں سے (۲ ن-۳) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم از کم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کر دو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو چونکہ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا ہے اور مثلث کے صرف دو اجزاء کا معلوم ہونا درکار ہوتا تاکہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی پوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی نسبت دو اور اجزاء معلوم ہونا چاہئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی مساوی ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہئے جن میں سے ایک

Carnot, geometrie der Stellung

۱

L' Huillier, Polygonometrie. Geneva . 1789

۲

Lexell, Nou. comm. Petrop. vols. xix. xx

۳

اس کے بعد ضلع Γ حسب دفعہ سابق معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) اس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاوے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ \hat{A} وہ اس میں جن پر کہ زاوے غیر معلوم ہیں؛ \hat{B} کو \hat{A} تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاوے سوائے ان دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس لئے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب \hat{A} اور \hat{B} پر کے زاویوں کو متعین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے دو متصل زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی بموجب حل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور \hat{A} پر کے زاوے ان دو حصوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ \hat{A} سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

(173)

۱۴۳۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲)

ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

ہم رشتہ $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_{n-1} = 3\pi$

سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع اور معلوم کرنے کے لئے مساوات

$\hat{A}_1 \sin \hat{A}_2 + \hat{A}_2 \sin \hat{A}_3 + \dots + \hat{A}_{n-1} \sin \hat{A}_n = \hat{A}_1 \sin \hat{A}_2 + \hat{A}_2 \sin \hat{A}_3 + \dots + \hat{A}_{n-1} \sin \hat{A}_n = 0$

کو استعمال کر دو دوسرے غیر معلوم ضلع Γ کے عمود پر نفل لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ پھر ہم Γ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری بنیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۱۴۴۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۳)

زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ F, Q, S وہ راس ہیں جن پر کے زاوے نہیں دئے گئے ہیں، F, Q, S راس F کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ F, Q, S کے سوا ہر حصہ میں تمام اضلاع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے ان دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو ان غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں؛ اس لئے ہم F, Q, S راس F, Q, S اور F, Q, S پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث F, Q, S کے زاوے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم F, Q, S پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیر الاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

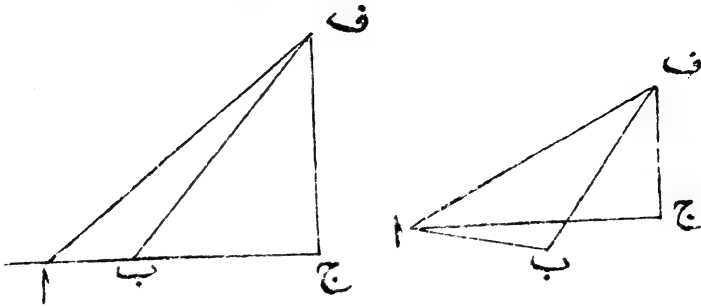
بلندیاں اور فاصلے

۱۴۵۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعین پر مثلثوں کے حل کے اطلاعات کی چند مثالیں دینگے۔ اس مضمون پر زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔ وہ خط مستقیم جو مقام مشاہدہ کو کسی شے سے ملتا ہے افق کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا، اس زاویہ کو شے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

۱۴۶۔ افقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ F ہے اور اس کا ظل افقی مستوی پر J ہے، فرض کرو کہ $FJ = f$ اور اس افقی مستوی پر کوئی خط AB = بشرط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ AB ایک خط مستقیم ہے،

فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پیمائش کیے گئے ہیں؛



ان کو 'ب' سے تعبیر کرو۔ تب $ل = ا - ج - ب$ ج = $ف (مم - مم ب)$ اس لیے

$$ف = \frac{ل جب مم جب ب}{جب (ب - مم)}$$

جس سے ف معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک ج کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، ا پر ف کا زاویہ ارتفاع پیمائش اور نیز زاویوں ف ا ب (= جہ) اور ف ب ا (= غہ) کی پیمائش کرو۔

$$تب ف ا = ا ب \times \frac{جب غہ}{جب (جہ + غہ)}، اور ف = ا ب \times جب غہ$$

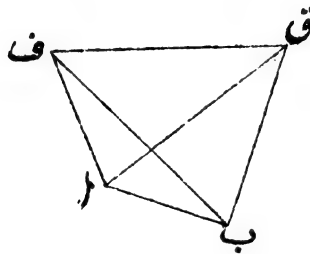
$$ف = \frac{ل جب مم جب غہ}{جب (جہ + غہ)}$$

اس سے ف معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۔ ناقابل رسائی و نقطوں کے درمیان
فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ا) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں ان میں سے ہر نقطہ سے نظر آ سکتے ہیں۔ آپر (180) صوبہ ذیل تین زاویے پیمائش کرو۔

ف ا ق = ع، ق ا ب = ب، ف ا ب = ج؛



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ضہ) اور ق ب ا (= صہ) پیمائش کرو۔

مثلثوں ا ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ا \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اور ا ق = ا \frac{\text{جب صہ}}{\text{جب (بہ + صہ)}}، پس ا ف اور ا ق ان ضابعلوں سے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{لوک ا ف} = \text{لوک ا} + \text{ل جب ضہ} - \text{ل جب (جہ + ضہ)}$$

$$\text{لوک ا ق} = \text{لوک ا} + \text{ل جب صہ} - \text{ل جب (بہ + صہ)}$$

مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = ع معلوم ہیں

ف کا محل معلوم ہو جاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہو جائیں کیونکہ
مثلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب
معلوم کیے جاسکتے ہیں۔
یہیں حاصل ہوتا ہے

(181)

$$لا + ما = ۳۲ - ع - ب - ج$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ب جب لا}}{\text{ج ب ع}} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{ج ب ب}} = \text{ف ج}$$

ایک امدادی زاویہ ف مان لو ایسا کہ

$$\text{مس ف} = \frac{\text{ا جب ع}}{\text{ب جب ب}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{ج ب لا}}{\text{ج ب ا}} = \text{مس ف، پس} \quad \frac{\text{ج ب لا - جب ما}}{\text{ج ب لا + جب ا}} = \text{مس (ف - ۴۵)}$$

$$\text{یا} \quad \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا - ا) = \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا + ا) \text{ مس (ف - ۴۵)}$$

$$= \text{مس (۴۵ - ف)} \text{ مس} \frac{۱}{۲} (ع + ب + ج)$$

اس طرح لا - ما معلوم کیا جاسکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے
لا اور ما معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثالیں

(۱) افقی مستوی میں ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا ب ج
میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ع دیکھا دیتا ہے
ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی $\frac{۱}{۲}$ و مس ع ہے نیز اگر ج پر کے ارتفاع میں
چھوٹی خطا واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی نسبت تقریبی طور پر ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ و مس ع} (۱ + \frac{\text{ج ب ا}}{\text{ج ب ب}} + \frac{\text{ج ب ج}}{\text{ج ب ا}})$$

لاجم (۱-ب) مس = جم ج مس ع (وج قط ع جب ن-لا)

اس لیے ۲ لاجب ا جب ب = وج قط ع جم ج جب ن

اس لیے اصل بلندی ہے ف + لا = $\frac{1}{2} \times \frac{\text{مس ع}}{\text{جب ا}} (1 + \frac{\text{جم ج}}{\text{جب ا جب ب}} \times \frac{\text{جب ن}}{\text{جب ۲ ع}})$

(۲) ایک مشکت کے ضلعوں کی پیمائش کی گئی تو معلوم ہوا کہ

۱ = ۵، ب = ۴، ج = ۶ لیکن یہ معلوم ہے کہ ج کی پیمائش میں ایک چھوٹی خطا ہے؛ معلوم کرو کہ کون سا زاویہ زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج کی صحیح قیمت لا + ۶ ہے؛ فرض کرو کہ مشکت کے زاویے

۱ + مف ۱، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں جن میں اجزاء مف ۱، مف ب، مف ج منحصر ہیں لاپیر؛ ہم لاکو اس قدر چھوٹا مان لینگے کہ اس کا مربع نظر انداز ہو سکتا ہے۔

ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم (۱ + مف ۱)} = \frac{۲۵ - (۵ + ۶) + ۱۶}{(۵ + ۶) ۴ \times ۲} = \frac{۵۱۲ + ۲۴}{(۵ + ۶) ۴ \times ۲} = \frac{۲۴}{۴۸} (1 + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲۴})$$

$$= \frac{۲۴}{۴۸} (1 + \frac{۵}{۱۸}) \text{ تقریباً}$$

پس جب ۱ × مف ۱ = $\frac{۵}{۳۲}$ ؛

$$\text{نیز جم (ب + مف ب)} = \frac{۱۶ - (۵ + ۶) + ۲۵}{(۵ + ۶) ۵ \times ۲} = \frac{۲}{۴} (1 + \frac{۵}{۱۰})$$

پس جب ب × مف ب = $\frac{۳}{۱۰}$ ؛

$$\text{اور نیز جم (ج + مف ج)} = \frac{۲۵ - (۵ + ۶) - ۱۶ + ۲۵}{۴ \times ۵ \times ۲} = \frac{۱}{۸} (1 - \frac{۱۲}{۵})$$

پس جب ج × مف ج = $\frac{۳}{۱۰}$ ؛

$$\text{نیز } \frac{\text{جب } ۱}{۵} = \frac{\text{جب } ۲}{۴} = \frac{\text{جب } ۳}{۶}$$

اس طرح ۲۴ مف ۱ = ۴۰ مف ۲ = ۵۰ مف ۳
اس لیے مف ۱، مف ۲ اور مف ۳ سے عدد اُچھوٹا ہے اور اس لیے
زاویہ ب زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

گیارہویں باب پر مثالیں

۱ — ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۱۲ = ۲۵۰۴۹۲۱۸۰$$

$$\text{لوک } ۶۱۹ = ۹۹۹۷۵۴۰۸۳ \text{، فرق } ۶۰ \text{ کے لیے } = ۴۳۷۰۰۰۰$$

۲ — اگر ایک مثلث میں ۱ = ۴۵، ۲ = ۱۶، ۳ = ۶۰ تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۳ = ۱۲۱۳۷۷۷۷۷ \text{، ل مس } ۶۰ = ۲۰۰۲۰۲۰۳$$

$$\text{لوک } ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ \text{، ل مس } ۶۱ = ۱۰۵۰۲۰۴۶۳۱$$

۳ — ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ (183)

$$\text{لوک } ۱۳۵ = ۱۱۳۰۳۳۳۸ \text{، لوک } ۱۲ = ۱۵۱۴۶۱۲۸۰$$

$$\text{ل جم } ۱۰ = ۵۷۹۹۲۱۱۷۵ \text{، ل جم } ۱۰ = ۵۷۹۹۲۰۹۳۲$$

۴ — اگر ۱ = ۴۵، ۲ = ۱۰، ۳ = ۲۰۰ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{، لوک } ۱۷۲۵۱۴۱۴ = ۱۷۲۵۱۴۱۴$$

$$\text{ل جب } ۵۵ = ۹۹۱۳۳۶۴۵ \text{، لوک } ۱۷۲۵۱۶۶۶ = ۱۷۲۵۱۶۶۶$$

۵ — اگر ایک مثلث میں ۱ = ۲۵ فٹ، ۲ = ۵۷ فٹ، ۳ = ۵۴ فٹ تو ب اور ج معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{ل مس } ۲۳ = ۹۱۶۲۷۸۵۱۹$$

$$\text{ل مس } ۱۵۱۳ = ۹۱۳۷۱۹۳۳۳ \quad \text{ل مس } ۱۶۱۳ = ۹۱۳۷۲۲۹۹۲$$

۱۳۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۲۶ ہے، مقابل کا ضلع ۴ اور ارتفاع ۵۔۱۰ ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۴۔ اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع $\frac{1}{2}$ (۳-۵) \times گھیرا، سے کم ہو تو بتاؤ کہ زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے؛ لیکن اگر ہر ضلع $\frac{1}{2}$ گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔

(184)

۱۵۔ اگر اجزاء ج = ۵، ب = ۲، ج = ۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو بتاؤ کہ ج کی قیمت میں ۱۰ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً ۳۵.۳۴ کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضلعوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع ۵۴ فٹ اور مقابل کا زاویہ ۵۹ ۵۹ ۵۹ ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷۔ ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸۔ ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزاء 'ب'، 'ا' سے حل کیا گیا ہے۔ اگر 'ا' ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں 'لا'، 'ما' سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے 'ا' سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

$$\text{لا جب } \text{ب} \text{ جم } \text{ج} = \text{ما} \text{ (جب } \text{ب} \text{ جب } \text{ج})$$

۲۰۔ ایک کشتی جنوب سے ۵۰ مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۵۰ مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے۔ کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ گزروں تک صحیح معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{ل جب } ۲۰ = ۹۱۵۳۲۰۵۲ \text{ ، لوگ } ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$$

$$\text{لوگ } ۲۶ = ۲۶۳۱۳۸۹۶ \text{ ، لوگ } ۲۰ = ۲۵۳۱۵۹۰۰$$

۲۱۔ ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۲۰ ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۹۰ اور ۵۰ ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیوں معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک انقباضی ستون کا پائین اُسے۔ ب اور ج، ا کے ٹیک مشرق میں ہیں اور د، ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج کے ارتفاع کا دوگنا ہے اور وہ زاویہ سن ا ل ہے جو ا ب کے محاذی د پر بنتا ہے، نیز ج ج = ۲۰ فٹ، ج د = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ۵۰ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ پر جس کا ارتفاع ۵۰ معلوم ہے اُپرٹھا جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی شمال میں زاویہ ارتفاع پر دکھائی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر کے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی

ا ف جب ع ج م بہ ق م (ع۔ م۔) ہے۔

۲۴۔ دو متقیم متقاطع پٹریوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹریوں کے مقام اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے محاذی دوسری پٹری پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ ع بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی لپٹ پہنچتی ہے تو زاویہ ع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹریاں ایک

دوسرے سے زاویہ ط پر ماٹل ہیں جہاں ط، مسادات ۲ مم ط = مم عہ مم عہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک اسطوانی مینار ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آ رہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویائی ارتفاع میدان کے اوپر عہ، عہ، عہ ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، ج، ج فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ج} - \text{ج}^2) (\text{ج}^2 - \text{ج}^2) + (\text{ج} - \text{ج}^2) (\text{ج}^2 - \text{ج}^2) = 0$$

۲۶ — ایک غبارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دیکھا گیا؛ دس منٹ بعد ٹھیک شمال میں ارتفاع بہ پر وہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کر کے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

۶

۲۶ مس عہ - مس ب

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔
۲۷ — مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خط مستقیم میں زاویائی ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویائی نشیب بہ اور جہ دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطح آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

$$\frac{2}{\text{ج} - \text{ج}^2} \text{عہ جب (بہ - جہ)}$$

$$\text{جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ)}$$

۲۸ — ایک برج کے جنوب میں مقام ۲ سے برج کا زاویائی ارتفاع ۲۰ ہے اور مقام ب پر جو اسے ا فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے برج کا ارتفاع ۲۸ ہے۔ بتاؤ کہ برج کی بلندی $\frac{2}{2 + 5\sqrt{2}}$ ہے۔

۲۹۔ ایک بُرج ۵۰ فٹ بلند ہے اور زمین سے ۵۰ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس فاصلہ پر بُرج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائینگے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰۔ ایک شخص مسلح میدان سے جس پر ایک بُرج ہے اور بُرج پر ایک غیار ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ بُرج کے پائین سے اونیٹ فاصلے پر ہوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ بُرج کے پائین سے ۵ فٹ اور پرے سے دیکھتا ہے کہ غیار کے محاذی اس کی آنکھ پر حسب سبقت وہی زاویہ بنتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں ہیں؛ ثابت کر دو کہ اگر مشاہد کی آنکھ میں سے گزرنے والے افقی مستوی کے اوپر بُرج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اسی مستوی کے اوپر $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ فٹ ہوگی۔
۳۱۔ ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مضلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے، وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مضلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہوتا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے a اور b ہوں اور سورج کا ارتفاع θ ہو تو ثابت کر دو کہ مخروط مضلع کی بلندی ہے

$$10. \text{ مس } \theta = \frac{1}{2} (5 - 2 - 2 + b^2) \text{ فٹ}$$

۳۲۔ ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویہ انشیب (186) θ ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویہ انشیب ϕ ہے۔ آئیں صحیح پہاڑی کا میلان معلوم کر دو۔

۳۳۔ a ج d ، ایک کمرہ کا مستطیلی فرش ہے جس کا طول a ج b ، اوٹ c ہے۔ کمرہ کی بلندی معلوم کر دو اگر c پر کمرے کی بلندی کے محاذی کونہ a پر زاویہ θ بنے اور کونہ b پر زاویہ ϕ بنے۔ اگر $a = 8$ فٹ، $\theta = 45^\circ$ ، $\phi = 30^\circ$ تو ثابت کر دو کہ بلندی تقریباً ۸ فٹ ۱۰ انچ ہے۔

۳۴۔ ایک بُرج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان θ ہے

۱ فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو برج کے اوپر سے ایک تالاب میں دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ برج سے ج ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی

ب ج جب ع

۱ + ب + ج = جم ع ہے۔

۳۵ — ایک شخص دو برجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک برج اس کی آنکھ پر زاویہ ع بناتا ہے؛ پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر دو برجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ ج پر اگل ہے ۱ فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ ب بنتا ہے؛ برجوں کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو۔

ف ف (م م ب - م م ع) = ۱

(ف - ف) (م م ب - م م ع) = ۲ ل م م جم ج

جن میں ف، ف سے برجوں کی بلندیاں بغیر ہوتی ہیں۔

۳۶ — ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پل کے دو ستونوں کے زاویہ نشیب ع ب مشاہد کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ۱ مشاہد کے نقطہ پر زاویہ ط بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

$$\frac{1}{p} \text{ ل م م ف ق ط } \frac{1}{p} \text{ ط } \left| \text{ج ب ع جب ب} \right.$$

جہاں جم ف = ۲ جم ل ط م ا جب ع جب ب (جب ع + جب ب) ۱

۳۷ — ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین برج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے نشیب ع ع، ع ب ہیں؛ اگر ج، ج، ج برجوں کی بلندیاں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (ع - ع)}}{\text{ج جب ع}} + \frac{\text{جب (ع - ع)}}{\text{ج جب ع}} + \frac{\text{جب (ع - ع)}}{\text{ج جب ع}} =$$

۳۸ — ایک قلعہ سے ایک توپ ۱ داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آنے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفہ ہوئے وہ علی الترتیب ت^۱ ت^۲ ہیں؛ خط مستقیم ب ج میں ۱ سے معلومہ فاصلہ ۱ پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب = د = ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{ \frac{(ب-ج) (و-ب ج)}{ب ت - ج ت} \right\}$$

اُس صورت کا امتحان کرو جب، و = ب ج

۳۹ — ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکنی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع ع مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف ۱ فٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع ب معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ت ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$\left\{ \frac{ج ب ع جب ب}{ج ب (ب-ع)} \times \frac{۱}{ت} \right\} \text{ جم}$$

۴۰ — ایک کڑوی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع ع اور گنبد کا زاویہ ارتفاع ب مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد کی طرف فاصلہ ۱ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے عین اوپر ہے (۱۸۷) اور اس کا زاویہ ارتفاع ج ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{و جب ج}{ج ب (ج-ع)} \times \frac{ج ب ع جم ج}{جم ج-جم ب}$$

۴۱ — کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع ع ہے۔ ایک شخص اس وقت

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شکاف دیکھتا ہے جو اس کے جنوب میں ۱۰ فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصباً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شکاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن دماغ اُس کی آنکھ پر ۲ ذہ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} (\text{م}^2 \text{ع} \text{م}^2 \text{ذ} - \text{م}^2 \text{ط}) - ۲ \text{لا} \text{م}^2 \text{ع} \text{م}^2 \text{ذ} + \text{لا} (\text{م}^2 \text{ذ} - \text{م}^2 \text{ط}) = ۰$$

۴۲۔ ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دو سیدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصبائی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصبائی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی انقوائم ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی ٹرک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ ثابت کرو کہ پہاڑی

$$\text{افقی سمت کے ساتھ زاویہ جب } \left(\frac{\text{لا} + \text{ب}^2 - ۲ \text{لا} \text{ب} \text{جم}^2 \text{ع}}{\text{لا} \text{ب} \text{جب}^2 \text{ع} \text{م}^2 \text{ع}} \right) \text{ پر مائل ہے۔}$$

۴۳۔ ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ۱ طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوط مستقیم جو زاویے قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اُس آنکھ سے جس سے زاویے ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے (۱+ن) گنی جاہل ہوئی ہوں جہاں ن بہت چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$\text{ن لا} \times \frac{\text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{ع} - \text{ع} \text{جب}^2 \text{ب}}{\text{جب}^2 \text{ع} (\text{ع} - \text{ب})}$$

کے بہت قریب ہے؛ عہ بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴۔ ایک مشاہدہ ایک جہاز کے عرشے سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دُور کے روشنی کے میلہ کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جھبڈے کے ڈنڈے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشے سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اُسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمند کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر... میل ہے۔

۴۵ — ایک سیدھی نہر کے کنارے پر تین کھجے ایک ایک میل کے فاصلے پر لگائے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلے اور تیسرے کھجوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کھجے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ — تین نقطوں ۱، ۲، ۳ پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سورخ ڈال کر مورم کی تار لٹکایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب ۱، ۲، ۳ گہرائیوں پر ہے؛ نیز ۱ ب = ف، ۲ ب ج = ک، ۳ ب ج = ع، اگر مورم کی تار کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان ذ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مس } \angle \phi = \left\{ \frac{2 - (1-2)}{1-2} \right\} \frac{(1-2)}{2} + \frac{(2-3)}{2} \quad (188)$$

۴۷ — ایک ستون کا زاویائی ارتفاع ع ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور ب ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ج ب ع جب ب}}{\text{جب (ع - ب) جب (ع + ب)}}$$

۴۸ — ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف $\frac{1}{2} \pi$ کا زاویہ بناتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے،

پھر وہ طرقتی ہے اور بندرگاہ میں اس کی طرٹ حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۶ میل ہے۔

۴۹۔ ۱ نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا راستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اس شخص کو نظر آسکتے ہیں $\frac{1}{3}$ واں ہے جہاں

$$\left\{ \frac{2 + \frac{b^2}{a^2}}{b + \frac{d}{a}} \times \frac{d + \frac{f}{a}}{2 + \frac{d^2}{a^2}} \right\} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

بشرطیکہ $f > d(1 + \frac{b^2}{a^2})$ اور $\frac{d}{b} < 1 + \frac{b^2}{a^2}$

۵۰۔ ایک کروکی حلقے (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے لیے یہ عین ممکن ہو جائے کہ وہ حلقے میں سے جاسکے (۱) سیدھا، (۲) ایک تار کو ٹکرائے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرائے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱۔ تین پہاڑوں کی چوٹیاں 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مشاہد کو ایک ہی خط مستقیم نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات 'ف' اور 'ق' میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، 'ا'، 'ب' اور 'ج' کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عین بتاتا ہے اور زاویہ 'ا' ق 'ف'، 'ج' 'ف' 'ق'، علی الترتیب وہ اور یہ ہیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

$$\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲ : (\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲) : (\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲) : \text{مم } ۲ + \text{مم } ۲$$

نیز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط Δ ج کو د پر قطع کرے تو Δ ج د جب Δ ج (م پ + م م Δ)
 ۵۲ — ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹری سے ج فاصلہ پر کھڑا ہوا ایک
 ٹرین دیکھتا ہے جو پٹری پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹری کے
 اُس نقطہ سے Δ فاصلہ پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص
 ٹرین کے محاذی جو زاویہ نبٹا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول
 محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ Δ کے مشاہدہ کرنے میں اُس سے ایک چھوٹی خطا
 طہ مرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خطا
 وقوع پذیر ہوگی اس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

ج ط

جب Δ (ج جم Δ - وجب Δ)

۵۳ — ایک پہاڑ کی بلندی ف حسب ذیل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے
 معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خطب ج (و) 'زاویے Δ ب ج'
 Δ ج ب اور زاویہ (ی) جو Δ ب، انتصابی خط کے ساتھ بنانا ہے۔
 بتاؤ کہ

$$ف = \frac{\text{وجم ی جب ج}}{\text{جب (ب + ج)}}$$

(189) اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ب ج کی مناسب ترین سمت

$$ب = ۲ \text{ مس } ۱ \left(\frac{\text{وجم ی - ف}}{\text{وجم ی + ف}} \right)$$

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمائش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت
 کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

۵۴ — تین انتصابی جہڈے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں
 تین نقطے Δ ، ب، ج ہیں جن میں سے ہر ایک پر ان تین جہڈوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں؛ اور یہ خطوط مستقیم اوق کے ساتھ علی الترتیب زاویے عہ، ب، جہ بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں میں جو ستوی گذرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ ثابت کر دو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

ب ج

$$\sqrt{م^2 ب^2 - م^2 ط^2} + \sqrt{م^2 ج^2 - م^2 ط^2}$$

اور دو متساویہ جملے۔ بتاؤ کہ جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہئیں۔
 ۵۵۔ ایک بُرج ا ب ایک افقی ستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینا ب ج ہے۔ ایک پہاڑ پر جس کا رخ ایک مائل ستوی خیال کیا جاسکتا ہے ایک مشاہد مقام ع پر کھڑا دیکھتا ہے کہ ا ب، ب ج میں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے؛ اب وہ مقام ف تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ع ف (= ۱۲) کی پیمائش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر اب ب ج اس کی آنکھ پر وہی زاویے عہ بناتے ہیں؛ اب وہ زاویوں ا ف ع (= بی) اور ج ف ع (= جہ) کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر اب ب ج کی بلندیاں لا اور ما ہوں تو بتاؤ کہ

$$\left\{ \frac{\text{جم بہ جم جہ جم عہ}}{\text{جم}^2 پ^2} - ۱ \right\} = \frac{\text{جم}^2 پ^2}{\text{جم}^2 پ^2} \left(\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right) \left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱} \right)$$

نیز اگر ع ف کا نقطہ وسطی ث ہو اور ث میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم پر وہ نقطہ ہو جس پر ا ب، ب ج مساوی زاویے ضہ بناتے ہیں اور اگر ث ض = ب تو ثابت کر دو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان طہ مساوی ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{\text{لا}^2 \text{ما}^2}{۲(\text{لا} - \text{ما})} - \left(\frac{\text{ا}^2 \text{ب}^2 + \text{ب}^2 \text{ج}^2}{۲\text{ب}^2} \right) \right\} = \frac{\text{لا}(\text{لا} + \text{ما}) \text{جب}^2 \text{ضہ}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲\text{لا} \text{ما} \text{جم}^2 \text{ضہ}}$$

(190)

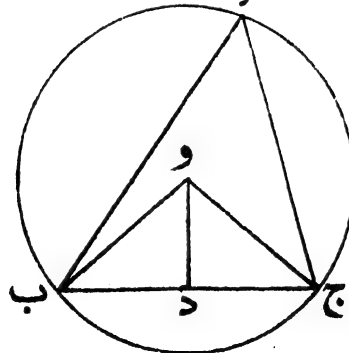
بارہواں باب

مثلثوں اور ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰۔ اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے اُن مثلثوں کو بلا ثبوت مان لینگے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مثلثوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

مثلث کا حائط دائرہ

۱۵۱۔ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ سر = $\frac{1}{2}$ ارقم ۱ دفعہ ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:



(191)

فرض کرو کہ Δ حائلہ دائرہ کا مرکز ہے؛ مثلث Δ ب ج کے ضلع
ب ج پر عمود $ود$ کھینچو، تو ب ج کا نقطہ وسطی $د$ ہے اور زاویہ $ب و د = ۹۰^\circ$
چونکہ $ب د = و ب$ جب $ب و د$ اس لیے

$$\frac{۱}{۲} = س ا جب ا، یا س = \frac{۱}{۲} \text{ و } ق م ا \dots (۱)$$

اگر مثلث کا رقبہ $س$ سے تعبیر ہو تو

$$س = \frac{۱}{۲} ب ج جب ا$$

اس طرح حائلہ دائرہ کے نصف قطر کے لیے ہیں جملہ حاصل ہوتا ہے

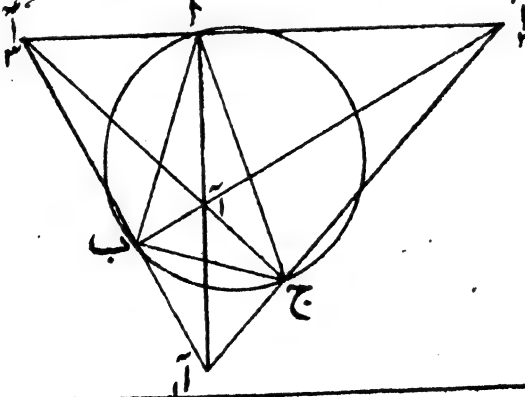
$$س = \frac{ب ج}{۴ س} \dots (۲)$$

$$ود = و ب = س ا = س ا$$

نیز

مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے

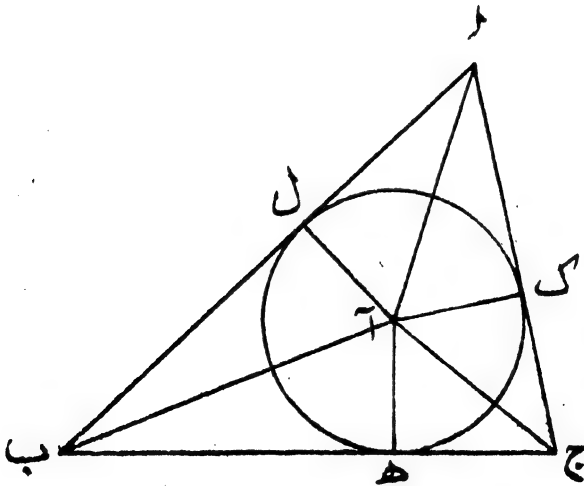
۱۵۲۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو
مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؛ اندرونی دائرہ ہر ضلع
کو داخلی طور پر مس کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز $آ$ ہے؛ ہر جانبی دائرہ مثلث
کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے، فرض کرو کہ



ان جانبی دائروں کے مرکز آ، آ، آ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ، آ، آ ج، آ ج، علی الترتیب زاویوں آ، ب، ج کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ، آ، آ ج علی الترتیب زاویوں ب، ج کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ، آ، آ کے راسوں آ، آ، آ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود آ، آ، آ ب، آ، ج آ، ہیں اور اس مثلث آ، آ، آ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث اب ج کا حائلہ دائرہ، مثلث آ، آ، آ کا نقطہ دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائلہ دائرہ ضلعوں آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۳۵۱ — فرض کرو کہ مثلث اب ج کے ضلعوں اب، ب ج، ج ا کو اس کا اندرونی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ہ، ک چرس کرتا ہے۔



تب Δ آب ج + Δ آج ا + Δ آاب = س
 اب چونکہ Δ آب ج = $\frac{1}{p}$ آھ \times ب ج = $\frac{1}{p}$ ر ا،
 Δ آج ا = $\frac{1}{p}$ رب، اور Δ آاب = $\frac{1}{p}$ رج،
 جہاں ر اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس لیے

$$\frac{1}{p} = (ج + ب + ا) = س$$

یعنی $\frac{س}{p} = 1$ ، (۳)

جس سے اندرونی دائرہ کا نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

$$ا = بھ + جھ = ر (مھ + بھ + جھ)$$

اس لیے $ا = ر$ جب $\frac{1}{p}$ ب جب $\frac{1}{p}$ ج ق $\frac{1}{p}$ ا (۴)
 یہ کے لیے دوسرا جملہ ہے جو (۳) سے بھی اخذ ہو سکتا ہے۔

ضابطوں (۱) اور (۴) کو ملانے سے ہمیں تشاکل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ا = ر = ۴$$

نیز چونکہ $ا = ب + ج = \frac{1}{p} (ب + ج + ا)$

$$ا = ب + ج = س - ا$$

اور اسی طرح $ب = ا + ج = س - ب$ ، $ج = ا + ب = س - ج$

پس چونکہ $ا = ر = ا$ $ب = ب$ $ج = ج$ $س = س$

ہمیں جملے حاصل ہوتے ہیں

$$ا = ر = (س - ا) = ا = (س - ب) = ب = (س - ج) = ج = س$$

ان کو (۳) اور (۴) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے۔

۱۵۴ ——— دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں $\frac{1}{2}م$ ، $\frac{1}{2}پ$ ، $\frac{1}{2}ج$ کے لیے جملے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث $آ ب ج$ کے ضلعوں $ب ج$ ، $ج آ$ ، $آ ب$ کو وہ دائرہ جس کا مرکز $آ$ ہے نقطوں $ہ$ ، $ک$ ، $ل$ پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\frac{1}{2}آ ب + \frac{1}{2}آ ج - \frac{1}{2}آ ب ج = س$$

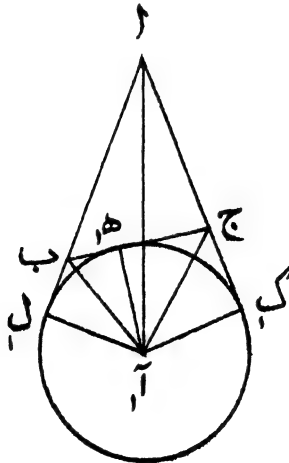
$$\text{اس لیے } \frac{1}{2}م (ب + ج - آ) = س$$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$\frac{س}{\frac{1}{2}م} = \frac{س}{\frac{1}{2}پ} = \frac{س}{\frac{1}{2}ج} = \dots (۷)$$

$$\text{نیز چونکہ } آ = ب ہ + ج ہ = م (م + ب + ج) \quad \text{نیز چونکہ}$$

$$\frac{1}{2}م = \frac{1}{2}م (ب + ج + آ) = \frac{1}{2}م (ب + ج + م) \quad \text{اس لیے} \quad \frac{1}{2}م = \frac{1}{2}م (ب + ج + م) \quad (۸)$$



اس سے ضابطہ ملتا ہے

(۴) ثابت کرو کہ $۱۶ س^۲ = ۴ ب^۲ + ۴ ج^۲$

(۵) ثابت کرو کہ $۱ = \frac{۴ س^۲ + ۴ ب^۲ - ۴ ج^۲}{۴ س^۲}$ جم

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع (ا) کو مس کرتا ہے حائل دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ $جم = ۱ = جم ب + جم ج$

(۷) ثابت کرو کہ $۴ ب (ب + ج) = ۴ ب (ب + ج) = ۴ ب (ب + ج) = ۴ ب (ب + ج)$ جم ج
(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے اس سے $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$ ہوں اور اسے $۴ ب$ پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج = ۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$

(ب) $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج = ۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$

(ج) $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج = ۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$

(۹) بتاؤ کہ اس مثلث کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$\frac{۴ ب ج}{۴ ب ج}$ یا $۸ س^۲ = ۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر، اس کا دگنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبے $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$ ، $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$ ، $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$ ، $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$ ایسے بدلتے

ہیں جیسے $\frac{۴ ب}{۴ ب}$ ، $\frac{۴ ج}{۴ ج}$ ، $\frac{۴ ج}{۴ ج}$ ، $\frac{۴ ج}{۴ ج}$

(۱۲) ثابت کرو کہ (۱) $\frac{۴ ب + ۴ ج + ۴ ج}{۴ ب + ۴ ج + ۴ ج} = \frac{۴ ب + ۴ ج + ۴ ج}{۴ ب + ۴ ج + ۴ ج}$

(ب) $۴ ب + ۴ ج + ۴ ج = ۴ ب + ۴ ج + ۴ ج$

(۱۳) اگر ایک مثلث کے راسوں سے آ کے فاصلے ف_۱، ف_۲، ف_۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{s} = \frac{f_1 f_2 f_3}{r b c}$$

(۱۴) اگر اُس مثلث کے ضلع ر، ب، ج ہوں جو جابئی دائروں کے نقاط تماس

$$h_1, h_2, h_3 \text{ کو ملانے سے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ } \frac{r}{a} = \frac{b_1 - b_2}{c} = \frac{b_2 - b_3}{a} = \frac{b_3 - b_1}{b}$$

(۱۵) دائروں ب و ج، ج و ا، ا و ب کے مرکوز کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے (195)

اس کے ضلعوں میں نسبت جب ۲ : ۱ : ۱ جب ۲ ب : جب ۲ ج ہوگی۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مبہم صورت میں جبکہ ا و ب، ب و ج دیے جائیں جو دو مثلث

حاصل ہوتے ہیں ان کے حائلہ دائرے مساوی ہوتے ہیں؛ نیز ثابت کرو کہ

ان کے مرکوز کے درمیان فاصلہ ہے

$$(b^2 \cos^2 \frac{A}{2} - r^2)^{\frac{1}{2}}$$

(۱۷) مثلث کے حل کی مبہم صورت میں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں سے

بڑے ضلع کے ساتھ اندرونی دائروں کے نقاط تماس کا فاصلہ تیسرے ضلع

کی قیمتوں کے فرق کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

(۱۸) اگر مثلثوں آ ب ج، آ ج ا، آ ا ب کے حائلہ دائروں کے

نصف قطر غ_۱، غ_۲، غ_۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ۴ غ_۱ - ۳ (غ_۲ + غ_۳) = ۰

غ_۱ غ_۲ غ_۳ = ۰

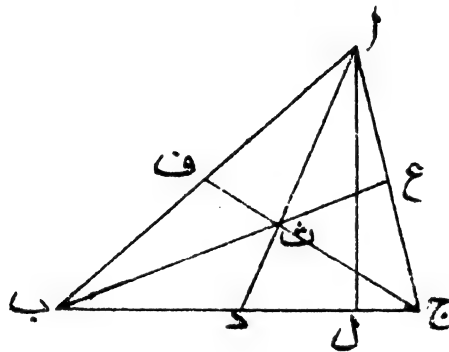
(۱۹) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے جابئی دائروں کے نصف قطر، کعبی مساوی

$$r^3 - 4rs^2 + 3s^3 = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

خطوط وسطی

۱۵۵ — ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم 'ا د'، 'ب ع'، 'ج ف' خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔



خط وسطی 'ا د' کا طول، مشہور مسئلہ 'ا ب' + 'ا ج' = ۲(ا د + ا ب) سے حاصل ہوتا ہے، اس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$م^۱ = \frac{۱}{۲} ب^۲ + \frac{۱}{۲} ج^۲ - \frac{۱}{۴} ا^۲ = م^۲ = \frac{۱}{۴} ا^۲ - \frac{۱}{۲} ج^۲ + \frac{۱}{۲} ب^۲$$

$$م^۱ = \frac{۱}{۴} ا^۲ - \frac{۱}{۲} ج^۲ + \frac{۱}{۲} ب^۲ = م^۲ = \frac{۱}{۴} ا^۲ - \frac{۱}{۲} ج^۲ + \frac{۱}{۲} ب^۲ \dots (۱۱)$$

سے ملتے ہیں جہاں 'م'، 'م'، 'م' خطوط وسطی کے طول ہیں۔ فرض کرو کہ

$$\frac{م^۱}{م^۲} = \frac{ا د}{ا ب} = \frac{ب ل}{ج ل} = \frac{ب ل}{ا ل}$$

جہاں ال' ب ج پر عمود ہے؛ پس م' مساوات

$$\text{مم م} = \frac{1}{2} (\text{مم ب} - \text{مم ج}) \quad \dots \dots (۱۲)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

نقطہ ث جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں
مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی
میں سے ہر ایک کو ث' نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

(196)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم ا ث ف + مم ب ث د + مم ج ث ع = مم ا
+ مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے مرکز ع، ہ، ج
ہوں اور مثلثوں ا ب ج، ع ہ ج کے رقبے ق، ق' تو ثابت کرو کہ

$$۴۸ ق ق' = (۲ا + ۲ب + ۲ج)$$

(۳) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے نصف قطر ہ، ہ'، ج
ہوں تو ثابت کرو کہ

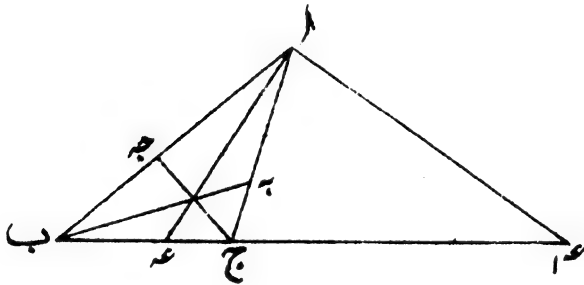
$$= \frac{۲ا(ب-ج)}{۲} + \frac{۲ب(ج-ا)}{۲} + \frac{۲ج(ا-ب)}{۲}$$

(۴) اگر زاوے ب ا د، ج ب ع، ا ج ف علی الترتیب ع، ہ، ج اور زاوے
ج ا د، ا ب ع، ب ج ف علی الترتیب ع، ہ، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم ع} + \text{مم ہ} + \text{مم ج} = \text{مم ع} + \text{مم ہ} + \text{مم ج}$$

زاویوں کے ناصف

۱۵۶۔ فرض کرو کہ زاویہ ا کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں ع اور ع پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں ا ع، ب ب، ج ج کے طول ف، گ، ہ ہیں اور خارجی ناصفوں ا ع، ب ب، ج ج کے طول ف، گ، ہ۔ تب ع اور ع کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں حال ہوتا ہے $\frac{ب ع}{ج ع} = \frac{ب ا}{ج ا} = \frac{ب ا}{ج ع}$ اس لیے $ب ع = \frac{ب ا}{ج ع} \times ج ع = \frac{ب ا}{ج} \times ج ع = \frac{ب ا}{ج} \times ج ع$



اور طول ف، گ معلوم کرنے کے لیے

$$ہ ا ب ع + ا ج ع = س = ہ ا ع ب - ا ج ع$$

$$اس لیے ف (ب + ج) جب ا = ف (ج - ب) جم ا = ۲ س$$

$$پس ف = \frac{ب ب ج}{ب + ج} جم ا = ف = \frac{ب ب ج}{ج - ب} جب ا = ۱۳۱ (۱۳۱) (۱۹۷)$$

مشائیں

(۱) اگر e ، b ، c وہ زاویے ہوں جو a ، b ، c ضلعوں کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 0$ ۔

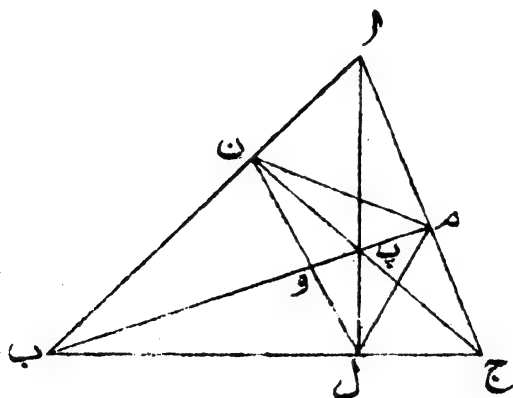
(۲) اگر زاویوں کے مناصفوں کو حلقہ دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول فیہم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{فاجم } \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ب } + \text{هـ} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ج } = \text{ر} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا}$$

اور ف $\frac{1}{4}$ + گ $\frac{1}{4}$ + ب $\frac{1}{4}$ + جم $\frac{1}{4}$ = ج $\frac{1}{4}$ + ب + ج
(۲) ثابت کرو کہ یہ ج $\frac{1}{4}$ کو نسبت ۲ ج : ۱ + ب میں قطع کرنا ہے۔

مشلت پائیں

۱۵۷۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے مقابل کے ضلعوں پر عمود 'ا'، 'ب'، 'ج' ن کھینچے گئے ہیں، ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث مل رہا ہے اس کو 'ا'، 'ب'، 'ج' کا مثلث یابیں کہتے ہیں۔



فرض کرو کہ مثلث ABC کا مرکز عمودی P ہے، تب چونکہ P AB پر
 P AB قائمہ زاویے ہیں اس لیے ایک دائرہ جس کا قطر AB ہو شکل
 P AB کے گرد پھینکا جاسکتا ہے، اس لیے
 $MP = PA$ اس زاویہ کی جیب جو قطاع MP میں بنتا ہے
 یعنی $MP = PA$ جب A

اب اگر حائط دائرہ کا مرکز O ہو اور OD AB پر عمود ہو تو یہ ظاہر
 ہے کہ $AB = 2OD$ ، اور ہم نے دفعہ ۱۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ
 $OD = \frac{1}{2} AB$ اس لیے

مرن $MP = 2$ سر جب A جم $A = 1$ جم A کا تمام ہے، یا مرل N
 نیز زاویوں P AB P BA میں سے ہر ایک، $12 - \pi$ پس مثلث پائیں کے ضلع اور زاویے علی الترتیب ہیں
 $12 - \pi$ $12 - \pi$ $12 - \pi$

جم A ، ب جم B ، ج جم C $\{ \dots (13)$
 $12 - \pi$ $12 - \pi$ $12 - \pi$

یہ توجہ طلب ہے کہ AA AB کا مثلث پائیں AB ج ہے۔ MP کا
 مثلث پائیں، AB ج کا دوسرا مثلث پائیں کہلاتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔
 ہم نے اوپر یہ مان لیا ہے کہ مثلث حادۃ الزاویہ ہے، اگر زاویہ A منفرج
 ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث پائیں کے زاویے $12 - \pi$ $12 - \pi$ $12 - \pi$
 $12 - \pi$ میں اور اس کے ضلع MP AB BC CA AB BC CA ہیں۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثلث MP کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر
 $MP = \frac{1}{2} AB$ $MP = \frac{1}{2} AB$ $MP = \frac{1}{2} AB$

(۲) اگر دائروں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے قطرے، ہ، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ب ج}{ب ج} + \frac{ج ہ}{ج ہ} + \frac{ہ ب}{ہ ب} = ۱$$

(۳) اگر مثلث پائیں کے اندرونی اور جانی دائروں کے نصف قطرے، کم، کم، کم ہوں تو

$$\frac{ا ا}{ا ا} = \frac{ب ب}{ب ب} = \frac{ج ج}{ج ج}$$

(۴) اگر ا ل، ب م، ج ن، حاطہ دائرہ سے نقطوں کی، م، ن پر لیں تو

$$\frac{ا ل}{ا ل} + \frac{ب م}{ب م} + \frac{ج ن}{ج ن} = ۲$$

خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۸ — فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ، حاطہ دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک جانی دائرہ کا مرکز آ، مرکز ہندی ت، اور نقطہ قطعی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ آ آیلر کے مشہور مسئلے کی بموجب تین نقطے و، ت، پ ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں اور پ ت = ۲ و ت، نقطہ ع بھی و پ پر واقع ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہے۔ زاویوں آ ا و، آ پ میں سے ہر ایک، $\frac{۱}{۲}$ (ب ج) کے مساوی ہے؛ نیز ا و = س ا، پ = ۲ س ا، ج م ا، آ آ = رقم $\frac{۱}{۲}$ = ۲ س ا، ج ب $\frac{۱}{۲}$ ب ج ب $\frac{۱}{۲}$ ج،

آ آ = ۲ س ا، ج م $\frac{۱}{۲}$ ب ج م $\frac{۱}{۲}$ ج، آ، پ، آ، ع کے درمیان ایک دوسرے

سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

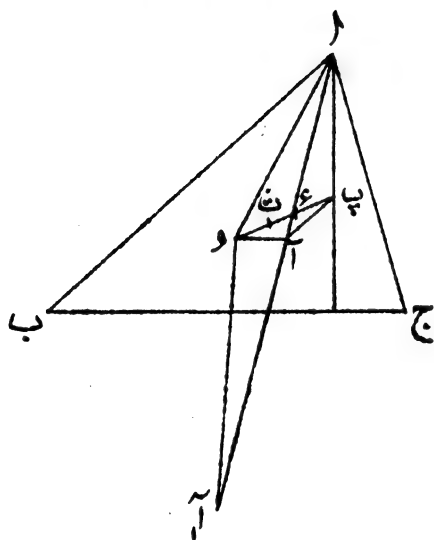
(199)

(۱) و آ معلوم کرنا۔ فرض کرو و آ = ضد تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ضد} = ۱و^۱ + ۱۱^۲ - ۱۲و + ۱۱آ.م و ۱آ$$

اس کے ضے = $\frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$ ب جب $\frac{1}{4}$ ج - $\frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$ ب جب $\frac{1}{4}$ ج \times
 جم $\frac{1}{4}$ (ب - ج) [(

یا ضہ = س (۱-۸ جب ۱/۲ جب ۱/۲ ب جب ۱/۲ ج)



پس ہمیں آئیڈل کا ضابطہ ضد = مٹا - ۲ سہارے (۱۵)

(۲) حاصل ہوتا ہے۔ آ معلوم کرنا۔ فرض کرو آ = ضم تو

[illegible]

ضرباً = سراً (۱+۸ جب ۱/۶ عم ۱/۶ ب عم ۱/۶ ج)

جس سے حاصل ہوتا ہے $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (۱۶)...

(۳) یہ معلوم کرنا۔ مثلث واپ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{وېټ} = \text{وټ} + \text{پټ} - \text{و} \times \text{پ} - \text{جم واپ}$$

یا وپا = مٹا [۱+۴ جم ۱-۴ جم اجم (ب-ج)]

جس سے حاصل ہوتا ہے وہ پنا = سما (۱-۸ مج ۱ مج ۱ مج ۱ مج ج) ... (۱۷)

(۴) آپ معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آپا = ۴ راجم + ۱۲ راجبا + ۲ بجا + ج

۱۰۔ $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{pq}$ (ج۔ ج)

اس لیے آیت ۴ = ۴ جم + ۱ + (۱- جم ب) (۱- جم ج) - جم ا جب ب جب ج

جم - ۱ (۱- مجب) (۱- جم ج) {

یا آپا = مآ { (ا-جم ا) (ا-جم ب) (ا-جم ج) - جم ا جم ب جم ج }

(1A)

یا آپ = ۲ - ۲ = ۴ مرآ. حم. ا. حم. ب. حم. ج

(۵) آئے معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$آء = \frac{1}{4} آپ + \frac{1}{4} آو - \frac{1}{4} وپ؛$$

اس لیے آء = $\frac{1}{P} - \frac{1}{P} + \frac{1}{P} = \frac{1}{P}$

اس لیے آء = $\frac{1}{p} - r$

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ؛ اب چونکہ $\frac{1}{6}$ س

نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آء، آء کے لیے جو جملے ہم نے حاصل کیے ہیں اُن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اندرونی اور جانی دائرے نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ پس فیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا، اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے گئے ہیں۔

مشائیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکوزوں سے حائط دائرہ کے تماس کیلئے جائیں اور ان کے طول 'ج'، 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2+2+1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث AOB کا رقبہ ہے

۱۔ اُجیب ۱/۲ (ب-ج) ۱/۲ جب ۱/۲ (ج-ا) ۱/۲ جب ۱/۲ (ا-ب) ۱/۲

(۳) ثابِت کِرو کہ

ث آ' = $\frac{1}{11}$ مر { $\frac{1}{3}$ جبا' ب جبا' ج - $\frac{1}{11}$ جبا' ا }

اور ث آ^۲ + ص ۴ = $\frac{1}{3}(ب ج + ج ر + ر ب) - \frac{1}{9}(و + ب + ج)$
(۴) ثابت کر دو

(۴۲) ثبات کرو کہ

$$\frac{3(1-a)(1-b)(1-c)}{2(1+abc)} = 1$$

(۵) اگر راسوں سے نقطہ قطعی دائرہ کے مرکز کے فاصلے a ، b ، c ہوں اور مرکز عمودی سے اس کا فاصلہ d ہو تو ثابت کرو کہ

$$عہ + ب + ج + ث = ۳$$

(۶) ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ حائل دائرہ کو قطع نہیں کرتا الا اس صورت کے جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرد ہو اور اس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ

$$ج + (۱ + ۲ + ۳) = ج + ب + ج$$

پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہو تو

(201)

ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹

(۸) اگر نو نقطی دائرہ کا مرکزی ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ق - ق) (ق - ق) (ق - ق) = ب - ج$$

(۹) اگر و آ پ ایک مساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

$$ج + ب + ج = ۳$$

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے

مساوی الفصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۹۰ ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ — مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعارف مختلف خطوط

اور زاویوں کی رقوم میں، جملوں کی ایک بہت بڑی تعداد معلوم

ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis, Vol. III میں اور

Annals of math. Vol. I. No. 6 میں ملنے گئے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور ان کی تصدیق کا

کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں :-

$$ل = ۱۲۰ - ۲۰ (۲) \quad ۱۲۰ - ۲۰ (۲) \quad ۱۲۰ - ۲۰ (۲) \quad ۱۲۰ - ۲۰ (۲)$$

جہاں $\frac{س}{۳} = \frac{م}{۳} = \frac{م}{۳}$ خطوط وسطی ہیں اور ۲۸۰ = $م + م + م$ (۳) $\frac{س}{۳} = \frac{م}{۳}$

(۵) $\frac{فجم \frac{۱}{۲} (ب-ج) + گجم \frac{۱}{۲} (ج-ا) + هجم \frac{۱}{۲} (ا-ب)}{۲}$

(۲) $\frac{فجم \frac{۱}{۲} (ب-ج) + گجم \frac{۱}{۲} (ج-ا) + هجم \frac{۱}{۲} (ا-ب)}{۲}$

جہاں $ف$ ، $گ$ ، $ه$ زاویوں کے منصف ہیں۔

(۶) $\frac{مجم \frac{۱}{۲} ا + ممجم \frac{۱}{۲} ب + ممجم \frac{۱}{۲} ج}{۳}$ (۷) $\frac{مجم \frac{۱}{۲} ا + ممجم \frac{۱}{۲} ب + ممجم \frac{۱}{۲} ج}{۳}$

(۸) $\frac{مجم \frac{۱}{۲} ا + ممجم \frac{۱}{۲} ب + ممجم \frac{۱}{۲} ج}{۳}$ (۹) $\frac{مجم \frac{۱}{۲} ا + ممجم \frac{۱}{۲} ب + ممجم \frac{۱}{۲} ج}{۳}$ (۱۰) $\frac{مجم \frac{۱}{۲} ا + ممجم \frac{۱}{۲} ب + ممجم \frac{۱}{۲} ج}{۳}$

مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰۔ اگر مثلث $ا ب ج$ کے مستوی میں کوئی نقطہ ہو تو ہمیں متاثرہ رشتہ

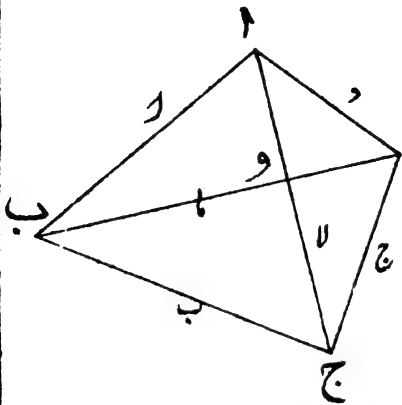
$ا ب ج + ا ب ج + ا ب ج = ا ب ج$ حاصل ہوتا ہے جبکہ ان مثلثوں کے رقبے جن کا اس $ق$ ہے واجب علامت کے ساتھ لیے جائیں؛ مثلاً $ا ب ج$ منفی ہوگا اگر $ق$ اور $ا$ ، $ب$ ج کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں۔ $ق$ کو مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ $ق$ ، $و$ پر منطبق ہوتا ہے تو متذکرہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے

جب $۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۳$ جب $۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۳$ جب $۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۳$

کیونکہ زاویے $ب و ج$ ، $ج و ا$ ، $ا و ب$ علی الترتیب ۱۲ ، ۱۲ ، ۱۲ ہیں۔

(204)



ہے۔ ضلعوں اب، ب، ج
ج د، د ا کو علی الترتیب
ا، ب، ج، د سے اور
د تروں ا، ج، ب د
کو علی الترتیب لا، ماسے
تبعیر کرو، نیز فرض کرو کہ ا
ج = ۲ = ۲ اور فہ = د تروں
کا درمیانی زاویہ -

ہم ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ میں کے لیے ایک جملہ، ا، ب، ج
د اور م کی رقوم میں معلوم کریں گے۔ چونکہ

$$ا^۲ = ا^۲ + د^۲ - ۲ ا د ج م ا = ب^۲ + ج^۲ - ۲ ب ج ج م ج$$

$$ا د ج م ا - ب ج ج م ج = \frac{۱}{۴} (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲)$$

نیز
ان مساواتوں کی تناظر طرفوں کا مربع کرنا اور جمع کرنا تو

$$ا^۲ د^۲ + ب^۲ ج^۲ - ۲ ا ب ج د ج م ا = ۴ س^۲ + \frac{۱}{۴} (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲)^۲$$

$$پس ۱۶ س^۴ = ۴ (ا د + ب ج) - (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲) - ۱۶ ا ب ج د ج م ا$$

$$یا ۱۶ س^۴ = \{ (ا د + د^۲) - (ب ج) \} \{ (ب ج + ج^۲) - (ا د - د^۲) \}$$

$$- ۱۶ ا ب ج د ج م ا$$

$$اس لیے س^۴ = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د)$$

$$- ا ب ج د ج م ا \dots (۱۹)$$

$$س^۲ = ا + ب + ج + د$$

جہاں

اُس ذواربعۃ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

کھینچا جا سکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2 = \frac{a}{b}$$

اس لیے $S^2 = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د) \dots (20)$
 جملہ (۱۹) سے یہ ظاہر ہے کہ وہ ذواربعتہ الاضلاع جس کے ضلع دیے گئے

ہوں بڑے سے بڑے رقبہ والا ہوگا جبکہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یعنی جبکہ ذواربعتہ الاضلاع
 ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

مسئلہ (۲۰) کو برہماگپتا (Brahme Gupta) نے، جو چھٹی صدی عیسوی
 میں ایک ہندو محنت پس گزرا ہے، دریافت کیا تھا۔

۱۶۵ — ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کے لیے ایسے جملے معلوم کیے
 جا سکتے ہیں جن میں وتروں کے طول اور ان کا درمیانی زاویہ
 شامل ہوں۔

ذواربعتہ الاضلاع کا رقبہ ان چار مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ
 کے مساوی ہے جن میں یہ ذواربعتہ الاضلاع وتروں سے تقسیم ہوتا ہے
 اب چونکہ ان میں سے ہر مثلث کا رقبہ
 $\frac{1}{2} \times \text{وتروں کے ان دو مقطعوں کا حاصل ضرب ہو}$
 مثلث کے ضلع ہیں x جب نہ

جہاں نہ، وتروں کا درمیانی زاویہ ہے اس لیے چاروں مثلثوں کے رقبوں کو جمع کرنے سے

میں $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب نہ}$ (۲۱)

نیز چونکہ $۱۰۲ \times \text{و ب جم نہ} = \text{و ا} + \text{و ب ا} - \text{و ا}^2$ ،

$۲ \times \text{و ج جم نہ} = \text{و ج} + \text{و د ج} - \text{و ج}^2$ ،

$۱۰۲ \times \text{و د جم نہ} = \text{و د} - \text{و ا} - \text{و د ا}^2$ ،

$۲ \times \text{و ب جم نہ} = \text{و ب ا} - \text{و ب} - \text{و ج}^2$ ،

اس لیے ۲ لا اجم ذہ = $ب^۲ + د^۲ - (ج^۲)$. . . (۲۲)

(205) اس لیے $س = \frac{۱}{۲}(ب^۲ + د^۲ - (ج^۲))$ مس ذہ ، . . . (۲۳)
اور ذہ کو ساقط کرنے سے ہمیں بریشنی ڈر (Bretschneider) کا ضابطہ

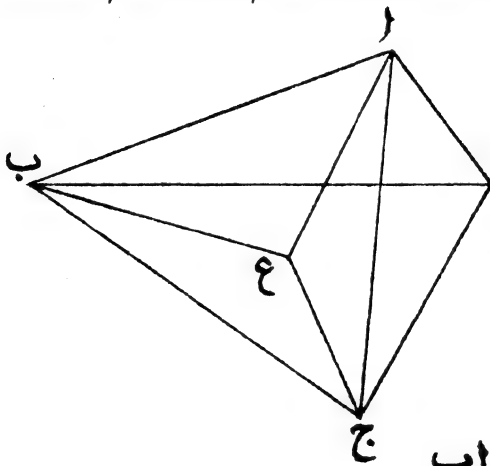
س = $\frac{۱}{۲}\{۴لا^۲ - (ب^۲ + د^۲ - (ج^۲))\}$ ، . . . (۲۴)
حاصل ہوتا ہے جو ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذواربعتہ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو $ج + ب + د$ اس لیے ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$س = \frac{۱}{۲}(ج - ب - د) مس ذہ$$

$$س = \frac{۱}{۲}\{[لا^۲ - (ج - ب - د)]\}$$
 اور

۱۶۶ — ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ،
ضلعوں اور دو متقابلہ زاویوں کے حاصل جمع کی جیب التمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔



ب اور ج سے
خطوط مستقیم ب ع اور
ج ع کھینچو ایسے کرنا چاہیے
ج ب ع، ب ج د، ج د ع
علی الترتیب زاویوں
ا ب د، ا د ب کے
ساوی ہوں مثلث
ع ج ب، ا ب د
متساویہیں اس لئے

$$\frac{ا ب}{ج ب} = \frac{ب د}{ج د} = \frac{د ع}{ج ع}$$

ہیں۔ تب چونکہ

$$لا^2 = ل^2 + ب^2 - ۲ ل ب \cos ب$$

$$لا^2 = ل^2 + ج^2 - ۲ ل ج \cos ج$$

اور

$$اس لیے لا^2 = \left(\frac{۱}{\cos ج} + \frac{۱}{\cos ب} \right) = \frac{لا^2 + ج^2}{ج \cos ج} + \frac{لا^2 + ب^2}{ب \cos ب}$$

$$پس لا^2 = (ل ج + ب د) (ل د + ج ب) \backslash (ل ب + ج د) (۲۶) \dots$$

اور اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$ما^2 = (ل ج + ب د) (ل ب + ج د) \backslash (ل د + ج ب) \dots$$

نیز چونکہ

(207)

$$فا = ۱ د = \frac{ج ب د}{ج ب (۱ + د)} = \frac{د لا}{لا ج م + د لا ج م}$$

ب

$$اور اسی طرح ف ب = \frac{ب ا ج م}{لا ج م + د لا ج م}$$

$$اس لیے ف ا = \frac{۱}{د لا} = \frac{ف ب}{ب ا} = \frac{ف ب - ف ا}{ب ا - د لا} = \frac{۱}{ب ا - د لا}$$

$$پس ف ا \times ف ب = \frac{۱ \times ب ا}{۲ (ب ا - د لا)}$$

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے

$$گ ج \times گ ب = \frac{ب ا ل ج لا}{۲ (لا - ج لا)}$$

اب چونکہ ف گ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک پہنچے ہوئے

حاصل ہونے کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's Geometry

صفحہ ۹۲) اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = لا \left\{ \frac{ب ا ل ج لا}{۲ (لا - ج لا)} + \frac{۱ \times ب ا}{۲ (ب ا - د لا)} \right\}$$

اب لا اور با کی اُن قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{لا + ب ج} = \frac{با}{لا + ج د} = \frac{با - لا}{(لا + ج د) - (لا + ب ج)} = \frac{با - لا}{(ج د - ب ج)}$$

اس لیے ی کے مندرجہ بالا جملہ میں اندر اِج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$Y = (لا + ب ج)(لا + ج د) \left\{ \frac{لا}{(ج د - ب ج)} + \frac{با}{(ج د - ب ج)} \right\} \dots (۲۵)$$

مثالیں

(۱) اگر ذواربعتہ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ

کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{(لا + ب ج)(لا + ج د)(ب د + ج د)}{(س - لا)(س - ج)(س - ب)(س - د)} \right\} = \frac{1}{4}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے نقطہ تقاطع کے درمیان فاصلہ ہے

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{(لا + ب ج)(لا + ج د)(ب د + ج د)}{(س - لا)(س - ج)(س - ب)(س - د)} \right\} = \frac{1}{4}$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذواربعتہ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{(لا + ب ج)(لا + ج د)(ب د + ج د)}{(س - لا)(س - ج)(س - ب)(س - د)} \right\} = \frac{1}{4}$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{(لا + ب ج)(لا + ج د)}{(لا + ب ج)(لا + ج د)}$$

(۴) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ S ہو تو ثابت کرو کہ متقابل ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ

$$\text{من } \left\{ \frac{S}{(ا + د + ب + ج)} \times \frac{۲}{(۲ + ۲ + ۲)} \right\}$$

پر ملتے ہیں۔

(۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذواربعۃ الاضلاع کے تین دتروں میں سے دو دو کے نقاط تقاطع ع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ع ف گ کے رقبہ کو ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

$$\frac{۲}{۲} : \frac{۲}{۲} : \frac{۲}{۲} = ۱ : ۱ : ۱$$

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جاسکتا

$$= \frac{۱}{۲} (ا + ب + ج + د) = \frac{۱}{۲} (ا + ب + ج + د) = \frac{۱}{۲} (ا + ب + ج + د)$$

(۷) اگر چار خطوط مستقیم دیئے جائیں تو ان سے تین جداگانہ ذواربعۃ الاضلاع بنائے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جاسکتا ہے۔ ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں، ان کے وہ چہرہ وتر جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں، اور اگر ان خطوں کے طول ع، ہ، ج ہوں اور مشترک رقبہ S اور دائرہ کا نصف قطر r ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{S}{r} = \frac{۲}{۲}$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلع ب، د ہیں اور جن کے اس ذواربعۃ الاضلاع کے دتروں کے نقطہ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\frac{۱}{۲} (ا + ب + ج + د) - \frac{۱}{۲} (ا + ب + ج + د) = ۰$$

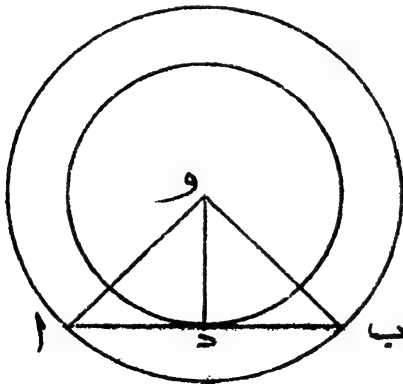
(۹) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ سب مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جاسکتے ہیں متشابه ہیں تو ثابت کرو کہ $ا^۲ + ج^۲ = ب^۲ + د^۲$
 (۱۰) ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جاسکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر؟ ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر $\frac{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + د^۲}{۲}$ ہے۔

(۱۱) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے وتر نقطہ $و$ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

$$رَبْعِ اَوْ ب \times رَبْعِ اَب ج د = رَبْعِ اَب ج \times رَبْعِ ا ب د$$

منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸ فرض کرو کہ $و$ ، اُن دائروں کا مرکز ہے جو n ضلعوں والے ایک منتظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر $ر$ ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر $ر'$ ، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول $ا$ ہے۔



(209) اگر کثیر الاضلاع کا ایک ضلع اب ہو اور اندرونی دائرہ کے ساتھ اس کا نقطہ تماس د ہو تو زاویہ ا د ب = $\frac{\pi}{n}$ اور زاویہ ا د ج = $\frac{\pi}{n}$ پس

۱ = ۲ مہاجب $\frac{\pi}{n}$ = ۲ مس $\frac{\pi}{n}$ ، (۲۸)

اس طرح دائروں کے نصف قطر معلوم ہو جاتے ہیں اگر ایک ضلع ل دیا گیا ہو۔ مثلث و اب کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ مہاجب $\frac{\pi}{n}$ ، یا $\frac{1}{2}$ ل د ، یا $\frac{1}{2}$ مس $\frac{\pi}{n}$

اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$\frac{1}{2}$ ن مہاجب $\frac{\pi}{n}$ ، یا $\frac{1}{2}$ ن ل د مس $\frac{\pi}{n}$ ، . . . (۲۹)

یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ایک دائرہ کے اندر یا گردن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کے کھینچنے کا سوال زاویہ $\frac{\pi}{n}$ کے دائری تغاعلوں کی تعیین کے سوال میں تحویل ہوتا ہے۔

۱۶۹ — مثالیں

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں ل، ب، ج کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا قطری جو ان تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ایسا ہے کہ

$$\sqrt{\frac{ق}{س-ل}} = 1 - \sqrt{\frac{ق}{س-ج}} + 1 - \sqrt{\frac{ق}{س-ب}} + 1 - \sqrt{\frac{ق}{س-ا}}$$

اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور اُس دائرہ کا مرکز وہو جس کا قطر ق ہے تو

$$دد = \frac{1}{4}(ق-ر)، دع = \frac{1}{4}(ق-ب)، وف = \frac{1}{4}(ق-ج)$$

نیز مثلث د ع ف کے ضلع $\frac{1}{4}ر، \frac{1}{4}ب، \frac{1}{4}ج$ ہیں، پس رشتہ

$$۵ د ع ف + ۵ وف + ۵ ود = ۵ د ع + ۵ د ع ف$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4}(س^۲ - ف^۲) \text{ جب } ا ب ب جب ج$$

جس میں ف سے وہ فاصلہ مراد ہے جو پ اور حائل دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔

و پ کو خارج کرو تا کہ وہ حائل دائرہ سے نقطہ پ پر ملے، پ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچو تو ان کے پائے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث کے لحاظ سے پ کا خط پائے کہتے ہیں۔ ایک نقطہ سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

$$\text{اب ہیں حاصل ہوتا ہے } \frac{پ ل - ود}{پ ل - ود} = \frac{د پ}{و پ} = \frac{ف}{س}$$

(210)

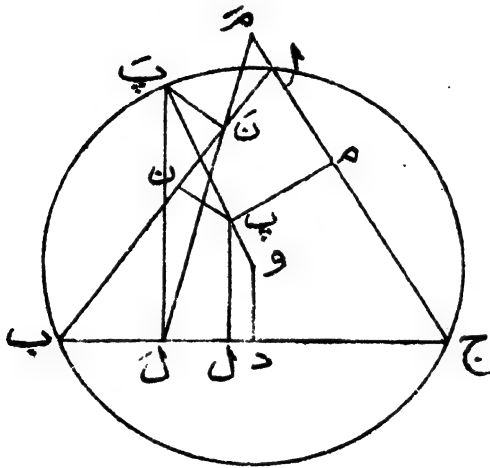
$$\text{اس لیے } پ ل = (س - ف) \cdot ج م + ۱ + \frac{ف}{س} پ ل$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے مشابہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$۵ ل م ن = پ م \times پ ن جب + ۱ + پ ن \times پ ل جب ب + پ ل \times پ م جب ج$$

$$= (س - ف) ج ا \cdot ج ب \cdot ج م + \frac{ف}{س} ج پ م \times ج پ ن \cdot ج ا$$

$$+ \frac{ف}{س} (س - ف) ج پ ل \cdot ج ا$$



نیز $\frac{1}{س} ج پ م \times ج پ ن \cdot ج ا$ مثلث ک م ن کا رقبہ ہے جو صفر ہے اور

$$ج پ ل \cdot ج ا = \frac{1}{س} ج پ ل \times ج پ ل = \frac{1}{س} ج پ ب \cdot ج ا = \frac{1}{س} ج ا \cdot ج ب$$

اور $ج ب ا \cdot ج م ب \cdot ج ج = ج ب ا \cdot ج ب ج \cdot ج ج$

$$\text{پس } ۵۲ ل م ن = (س - ف) ج ا \cdot ج ب \cdot ج ج + ۲ ف (س - ف) ج ا$$

$$\times ج ب ج \cdot ج ج = (س - ف) ج ا \cdot ج ب ج \cdot ج ج$$

(۳) اگر ا ب ج کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور پ کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہو جس کا مرکز وہی ہے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر پ کے تمام مقامات کے لیے

$$ا پ ا \times ۵ ب د ج + ب پ ا \times ۵ ج و ا + ج پ ا \times ۵ و ا ب$$

مستقل ہے۔

زاویوں ب وج، ج و ا، ا و ب کو α ، β ، γ سے تعبیر کر دو تو $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ، فرض کر دو کہ زاویہ پ و ا = $\pi - \alpha - \beta$ ۔ اب چونکہ

$$ا^2 = ب^2 + ج^2 - ۲ ب ج \cos \alpha$$

مع ب پ، ج پ کے لیے متشابہ جلوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

$$= ب^2 + ج^2 - ۲ ب ج \cos \alpha = ب^2 + ج^2 - ۲ ب ج \cos (\pi - \alpha - \beta) = ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج \cos (\alpha + \beta)$$

(211) اس جملہ کی پہلی دو قسمن، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں $\cos (\alpha + \beta)$ وہی ہے

$$\frac{۱}{۲} (ا^2 + ب^2 + ج^2) = ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج \cos (\alpha + \beta)$$

$$\frac{۱}{۲} (ا^2 + ب^2 + ج^2) = ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج \cos (\alpha + \beta)$$

اور یہ جملہ صفر ہے؛ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں :-

(۱) پ ا جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۳ مستقل ہے جبکہ پ، حائز دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(۲) پ ا جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۳ مستقل ہے جبکہ پ، اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(ج) پ ا جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۳ مستقل ہے جبکہ پ، بیرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

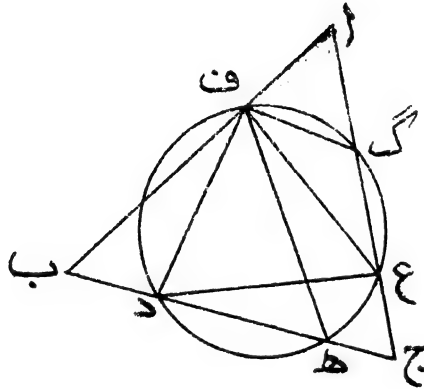
پ ج جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۳ مستقل ہے جبکہ پ، بیرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(۴) ثابت کر دو کہ اس اقل تساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کا طول

$$\frac{۲}{۳} (ا + ب + ج)$$

ہے جو ایک ویسے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جاسکے اس طور پر کہ اس کے ر اس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں، جملہ بالا میں ۵ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا متساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا حائلہ دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ہ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ہ ب میں سے ہر ایک ۶۰ ہے، اور اس لیے ف گ، ف ہ ثابت سمتوں میں ہیں، نیز زاویہ ہ ف گ = ۱۲۰ - ج



اگر ا ف کو لا سے تعبیر کریں تو

$$\text{ف گ} = \frac{\text{لا جب ا}}{\text{جب ۶۰}}، \text{ف ہ} = \frac{\text{لا جب ب}}{\text{جب ۶۰}}$$

اس لیے ہ گ = ۶۰ - {لا جب ا + (ج - لا) جب ب - ۲ لا (ج - لا)}

$$\times \text{جب ا جب ب جم (ج - ۱۲۰)}$$

اب دائرہ کا نصف قطر ہے ھگ ۲ جب (۱۲۰-ج) پس دائرہ اقل ہوگا
 جبکہ ھگ اقل ہو۔ اب کسی دودرجی جملہ لہ لا ۲ مد لا + نہ کی اقل قیمت
 نہ - ۲ ہے (جہاں لہ مثبت ہے) کیونکہ لہ لا ۲ مد لا + نہ اس شکل لہ لا + ۲ +
 نہ - ۲ میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے ھگ جب ۹۰ کی اقل قیمت کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\left[\frac{\text{ج جب} + \text{ب} + \text{ج جب} + \text{ب جب} + \text{جم} (ج - ۱۲۰)}{\text{ج جب} + \text{ب} + \text{ج جب} + \text{ب جب} + \text{جم} (ج - ۱۲۰)} \right] \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\text{ج جب} + \text{ب} + \text{ج جب} + \text{ب جب} + \text{جم} (ج - ۱۲۰)}{\text{ج جب} + \text{ب} + \text{ج جب} + \text{ب جب} + \text{جم} (ج - ۱۲۰)}$$

$$= \frac{\text{ج جب} + \text{ب} + \text{ج جب} + \text{ب جب} + \text{جم} (ج - ۱۲۰)}{۵۳۶۴ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب}}$$

اب مساوی الاضلاع کا ضلع ہے ھگ جب ۹۰ جب (۱۲۰-ج) پس اس ضلع

$$\frac{۲۱۵۲}{۵۳۶۴ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب}}$$

کی اقل قیمت ہے

(۵) تین دائرے

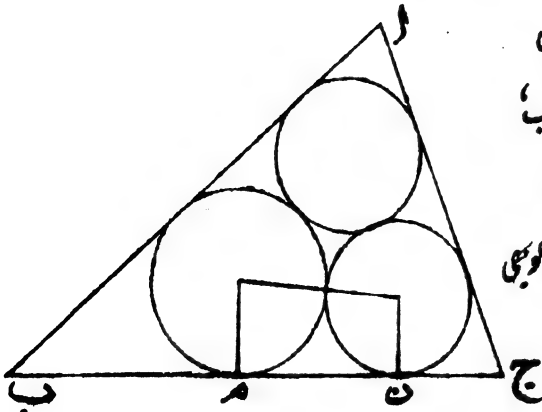
بنادجو باہم مس کریں

اور ان میں سے ہر ایک

ایک دیے ہوئے

شلث کے دو ضلعوں کو بھی

مس کرے۔



مندرجہ بالا حل شیز (Lehmütz) کے حل سے لیا گیا جو *Nouvelles Annales* کی جلد پنجم میں درج ہے۔ اس مسئلہ کا ہندی حل جو مال فٹی کے مسئلہ کے طور پر مشہور ہے، کیسی (Casey) کی *Sequel to Euclid* میں لیا گیا اور اس پر ایک تائیٹی مضمون ایم سینس کا لکھا ہوا *Bulletin de L'Academie Royale de Belgique* باب ۲۷ صفحہ ۱۷۱ میں لیا گیا۔

بارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک متوازی الاضلاع کے ضلع AB زاویہ C پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور اس کے وتروں کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{2 \times \text{AB جب } C}{2 \times \text{AB}}$$

۲۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے اس کے اندر دنی دائرہ کے نقاط تماس کے فاصلے a, b, c ہوں تو ثابت کرو کہ

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b+c}{\text{AB} + \text{BC} + \text{CA}} \right)$$

۳۔ ایک دائرہ کے اندر ایک منظم کثیر الاضلاع اور اس کے گرد اُتے ہی ضلعوں والا دوسرا منظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے ہیں۔ قبل الذکر کثیر الاضلاع کے رقبہ کو مابعد الذکر کے رقبہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ۳:۴ ہے۔ ضلعوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۔ ایک متوازی الاضلاع کے ہر زاویہ سے ایک ایک خط اس طرح کھینچا گیا ہے کہ یہ خطوط ایک ہی ترتیب میں متصل ضلعوں کے ساتھ ایک ہی جانب مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط ایک دوسرا متوازی الاضلاع بنائینگے جو ابتدائی متوازی الاضلاع کے متشابه ہوگا اگر $\text{AB} = 2$ اور $\text{BC} = 1$ جہاں AB ضلع ہیں اور متوازی الاضلاع کا زاویہ B ہے۔

۵۔ وہ خطوط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں A ، B ، C کی منصف

کرتے ہیں حائلہ دائرہ کے محیط سے نقطوں عہ، جہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم عہ جہ، ج ب اور ب ا سے تین حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں نسبت ہے

$$\text{ج ب}^2 : \text{ا}^2 : \text{ج ب}^2 : \text{ا}^2 : \text{ج ب}^2 : \text{ا}^2$$

۶۔ اگر ایک مثلث کے اندر دنی دائرہ کا مرکز آ ہو اور اس کے ضلعوں پر عمود آ، ب، آج ہوں اور ذوالربعۃ الاضلاعوں ا ب آج، ب ج آ، ج ا ب کے اندر دنی دائروں کے نصف قطر غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{غم} ۱}{\text{ر} - \text{غم}} + \frac{\text{غم} ۲}{\text{ر} - \text{غم}} + \frac{\text{غم} ۳}{\text{ر} - \text{غم}} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{ر}}$$

۷۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائلہ دائرہ اور اندر دنی دائرہ کے

مرکزوں کو ملانے والا خط ضلع ب ج کے ساتھ زاویہ $\frac{1}{2}(\text{ج ب ب} + \text{ج ب ج})$ بنا لے۔

۸۔ اگر ایک مثلث میں اس کے دو زاویوں سے متقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں کے پائیں ان ضلعوں کے نقاط وسطی سے مساوی الفصل ہوں تو ثابت کرو کہ تیسرا زاویہ ۹۰ ہے یا ۱۲۰، ورنہ مثلث مساوی الساقین ہے۔

۹۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو جس کا زاویہ ج قائمہ ہے اور ا ب پر عمود وار خط مستقیم ا ع، ب د کھینچے جائیں جو ب ج، ا ج عمودہ کو علی الترتیب ع، د پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس ج ع د = مس ا ب ا ج، اور

$$\text{ا ج ب} = \text{ا ج د} = \text{ا ج ب}$$

۱۰۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اس سے اس کے فاصلے ایک دوسرے مثلث کے ضلعوں ا ب، ب ج کے

تناسب ہوں تو ثابت کرو کہ ان فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{ج} + \pi$$

۱۱۔ ان چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں؛ اندرونی دائرہ اس طور پر جو مثلث بننا ہے اس کا رقبہ ان مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو باہمی دائروں سے مذکور الصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دو گنا ہے۔

۱۲۔ اگر ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اس کے اندر کوئی نقطہ پ تو ثابت کرو کہ

$$\Delta \text{ ا ب ج } \times \text{م ا پ ج} - \Delta \text{ ب پ د } \times \text{م ب پ د} = \Delta \text{ ج پ د } \times \text{م ج پ د}$$

۱۳۔ تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر ا، ب، ج ہوں اور ان کے مرکوزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب د، ہ، ہ، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}$$

۱۴۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے پ، ق، ر

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

ج ر اقل ہوگا جبکہ پ، ق، ر، ضلعوں کی تنصیف کریں۔

۱۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج پر مثلث کے بیرونی جانب قلعہ دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاویے د، ہ، ہ، بنائے ہیں اور د = ہ + ہ = ج، ان دائروں کے مرکوزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاوئے عہ، ب، جہ ہیں۔

(215)

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زاویوں کے ناصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصل اضلاع قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔

۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل ہو اور ل کے مساوی ہو تو

ثابت کرو کہ پ ا + پ ب + پ ج کی اقل قیمت ہے

$$\text{جب } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جب } ۳$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی علی الترتیب ر، ر، ر، فاصلوں پر خطوط متقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے گئے ہیں۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ معلوم کرو۔

اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن ان کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے رقبہ سے بقدر

$$\text{و } ۲ + \text{ب } ۲ + \text{ج } ۲$$

$$\Delta ۴$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر متشابه مساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ ان مساوی الساقین مثلثوں کے راسوں کو ملا کر ایک نیا مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے۔ اگر ا ب ج مساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مساوی الساقین مثلثوں کے

قاعدہ اول پر کے زاویوں میں سے ہر ایک ۲۰ ہے لیکن اگر $\angle A$ ج، مثلث $\triangle ABC$ کے متساویہ
ہو تو ان زاویوں میں سے ہر ایک $\frac{54}{2}$ مساوی ہے جہاں $\angle A$ سے مثلث $\triangle ABC$ کا
رقبہ مراد ہے۔

۲۰۔ ایک خط مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں A ، B ، C پر قطع کرتا ہے
اور ان کے مرکز سے فاصلہ پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو
 $\angle A$ ، B ، C پر کے ماسوں سے بنتا ہے۔ $\frac{AB \times BC \times CA}{2}$ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مثلث $\triangle ABC$ کے نقطہ قطعی دائرہ کا مرکز O ہو اور ضلعوں
کے نقاط وسطی D ، E ، F ہوں تو ثابت کرو کہ

$$AB \times BC \times CA + BC \times CA \times AB + CA \times AB \times BC = 0$$

۲۲۔ ایک مثلث کے ضلع AB پر D ، BC پر E ، CA پر F کے مساوی ناپا گیا ہے۔
 AD اور BE کی تنصیف نقاط E ، F سے کی گئی ہے اور E اور F کو ملایا
گیا ہے۔ ثابت کرو کہ $BC \times EF$ کے حائط دائرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے۔
 \times قہم $\frac{1}{2}$ ہے۔

۲۳۔ اگر مثلث $\triangle ABC$ کے ضلعوں پر A ، B ، C کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ
 $AB \times BC \times CA + BC \times CA \times AB + CA \times AB \times BC = 0$

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں
سے l ، m ، n ہوں تو ثابت کرو کہ

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2(R^2 - r^2) \quad \text{اور} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 2(R^2 - r^2) + 4Rr$$

۲۵۔ $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ وہ نقطے ہیں جہاں مثلث $\triangle ABC$ کے زاویوں کے

دائرہ کے مرکز سے لا، ما، ی ہوں اور حاطہ دائرہ کا قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$لا ما ی + ق (لا + ما + ی) = ۴ ق$$

۴۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملائیوا لے
خطوط مستقیم اس دائرہ کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث
ا ب ج کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۲} ر (جم \frac{۱}{۲} + جم \frac{۱}{۲} ب + جم \frac{۱}{۲} ج)$$

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لاکے بڑھایا جائے تو
ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً $س (لا + جم ب + جم ج)$ کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا، ب، ج ہیں اور آ، ب، ج سے
علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔
ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں
ا ب ج، د ع ف میں نسبت ۲ : ۱ جم ا، جم ب، جم ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے ضلعوں پر عمود
آ د، آ ع، آ ف کھینچے جائیں تو آ ع، آ ف، آ ب د، آ د ج ع
میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؛ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب
غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱-۲ غم) (۱-۲ غم) (۱-۲ غم) = ۴ - ۳ غم غم غم$$

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر س ج
ان تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

$$\frac{س (ب + ج + ۷) + س (ج + ا + ۷) + س (ا + ب + ۷)}{س (ب + ج + ا)} =$$

(219)

۵۳۔ اگر کسی نقطہ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{م د ج} + \text{م ب ع} + \text{م ج ف} = ۰$$

۵۴۔ اگر ب، ج، ب دیے گئے ہوں اور ان اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے اندر دنی دائرے ایک دوسرے کو مس کرینگے اگر

$$\text{ج}^2 = (\text{جم}^2 + \text{جم}^2 - \text{ب}^2) + (\text{ب}^2 - \text{جم}^2) + (\text{جم}^2 - \text{ب}^2) = ۰$$

۵۵۔ اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نقطہ دائرہ کے تماس کھینچے جائیں اور ان کے طول م، م، م ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}} \text{ اور } \frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{م}} = ۰$$

۵۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نقطہ دائرہ کے مرکز کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

$$\text{ر}^2 = \frac{1}{4}(\text{جم}^2 + \text{جم}^2 + \text{جم}^2)$$

۵۷۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متساوی مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، ق، ق، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ مثلثوں کا ایک زاویہ } ۲\text{م} = \left(\frac{\text{ق ق}}{\text{ق ق}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ہے،}$$

$$(ب) \text{ ق} = \frac{1}{2} \text{ ق} + \frac{1}{2} \text{ ق} + \frac{1}{2} \text{ ق}$$

$$(ج) \text{ دائرہ کا نصف قطر } (\text{ق ق ق ق})^{\frac{1}{2}} \text{ ہے۔}$$

۵۸۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے مقابل کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں زاوے ط، ذ، پ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے حائط دائرہ کا قطر ہے

مر جب (۲+ ذ- پ) + جم ط + جب (۲+ ب+ پ- ط) + جم ذ + جب (۲+ ج+ ط- ذ) + جم پ

جب (۱+ ذ- پ) + جب (ب+ پ- ط) + جب (ج+ ط- ذ)

۵۹۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ و پر زاوے

ع، ب، ج بنتے ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) جم $\frac{1}{4}$ ع + جم $\frac{1}{4}$ ب + جم $\frac{1}{4}$ ج = جم $\frac{1}{4}$ (ب+ ج) + جم $\frac{1}{4}$ (ج+ ع) + جم $\frac{1}{4}$ (ع+ ب)

ب ج جب (ع- ۱)

(۲) ۱۹ = [ب ج جب ع جب (ع- ۱) + ج ا جب ب جب (ب- ۱) + ا ب جب ج جب (ج- ۱)]

۶۰۔ اگر ایک مساوی الاضلاع مثلث (ضلع ۱) کے متساوی میں کسی نقطہ کے فاصلے

مثلث کے راسوں سے ف، ف، ف ہوں تو ثابت کرو کہ

ف_۱ ف_۲ + ف_۱ ف_۳ + ف_۲ ف_۳ = (ف_۱ + ف_۲ + ف_۳) = ۱۹ + ف_۱ ف_۲ + ف_۱ ف_۳ + ف_۲ ف_۳

پس ثابت کرو کہ دو مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے ہر ایک مثلث کے راس ایک ثابت نقطہ سے دئے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں ان فاصلوں پر بنائے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۶۱۔ اگر مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج،

ج پ ا، ا پ ب کے حائط دائروں کے مرکز د، د، د، د اور مثلث د د د، د د د کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہے، تو ثابت کرو کہ

۴۔ فہ جب ط جب فہ جب پ = لاجب ط + ماجب ذ + ی جب پ
جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول لا، ی ہیں اور ط، ف، پ، زاوے
ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

(220)

۶۲۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ل، ب ج ہیں ایک دوسرے کو
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ل، ب اُن دائروں کے نصف قطر ہیں جو ان
تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{ج} + \frac{2}{ب} + \frac{2}{ل} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{ب}$$

۶۳۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے نصف مقابل کے
ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع، ف، ب ج کے ساتھ
زاویہ

$$\frac{(ب - ج) جب ا}{(ا + ب) جم ج + (ل + ج) جم ب}$$

بناتا ہے۔

۶۴۔ اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی
دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور علیٰ نذر القیاس
تو بتاؤ کہ جیسے ن، لا انتہا بڑھتا ہے آ ن۔ آ ب ج کو اُس نسبت میں تقسیم کرتا
ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیم قطری اپوں کے درمیان ہے۔

۶۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف
لے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے
گئے ہیں جو علیٰ الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلاں ہیں اور
مثلث ا ب ج بناتے ہیں جو ا ب ج کے متشابه ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب ج
کے حاکم دائرہ کا نصف قطر ہے

$$(ع ف. جم ع + ف د. جم ب + د ع. جم ج) / ا ب ج ا ب ج ب ج ج$$

جہاں اکر ب ب ج ج کے میلان علی الترتیب ب ج ج ا ب کے ساتھ
عہدہ ہیں۔

۶۶۔ اگر ایک مثلث کے حاطد دائرہ پر ایک نقطہ ہو جس کا خط پائیں
مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودی سے ملائیں والا
خط مستقیم خط پائیں کو علی التوائم قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$پ ا + پ ب + پ ج = ۴ س (۱-۲) \text{ جم } ا ب ج م$$

۶۷۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج میں د ایک نقطہ ہے اگر مثلثوں
ا ب د ا ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو
ثابت کرو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب ج کے ساتھ د
ہے لیکن اگر دائروں کے نصف قطر مساوی ہوں تو

$$ج د : ب د :: ق م د + ق م ج : ق م د + ق م ب$$

۶۸۔ نصف قطر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین سمتی نصف قطر
جن کے طول ل، م، ن ہیں دائرہ تک کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا
درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$۳ (ل^۲ + م^۲ + ن^۲) = (ل + م + ن)^۲ = (ل + م + ن)^۲ (۱-۲) \text{ جم } ا ب ج م$$

اور اگر اس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ح ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱-۲) (ل + م + ن)^۲ = (ل + م + ن)^۲ (۱-۲) \text{ جم } ا ب ج م$$

۶۹۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج کو مس کرنے والے جانی دائرہ کے نقاط

د، ع، ف ہیں اور علیٰ ہذا التیاس مثلثوں د ع ف، د ع ب، د ب ع کے
اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غم، غب، غد ہوں
تو بتاؤ کہ

نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر علی الترتیب ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'س' کے رقبہ کو مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

$$۲: ۱ :: (ب + ج) : (ب + ج + ع) :: (ج + ع) : (ج + ع + ب) :: (ع + ب) : (ع + ب + ج)$$

۴۔ مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے متوی میں کسی نقطہ سے راسوں کے فاصلے 'ل'، 'م'، 'ن' ہیں اور حاطہ دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ 'ف' ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ل : ا : ب :: م : ب : ج :: ن : ج : ا :: (ل + م + ن) : (ا + ب + ج)$$

۵۔ اگر ایک مثلث کا مرکز ہندسی ڈھ ہو تو ثابت کرو کہ

$$م : ا : ب :: م : ب : ج :: م : ج : ا :: ۱ : ۱ : ۱ :: ۱ : ۱ : ۱$$

$$= م : ا : ب :: م : ب : ج :: م : ج : ا :: ۱ : ۱ : ۱$$

$$اور م : ا : ب :: م : ب : ج :: م : ج : ا :: ۱ : ۱ : ۱$$

$$جہاں م : ا : ب :: م : ب : ج :: م : ج : ا :: ۱ : ۱ : ۱$$

نیز اگر مثلث میں ک ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاویے 'ک' 'ا' 'ج' 'ب' مساوی ہیں مع دو اور متشابه رشتوں کے تو ثابت کرو کہ

$$م : ا : ب :: م : ب : ج :: م : ج : ا :: ۱ : ۱ : ۱$$

۶۔ ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو

دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے؛ اگر ایک

ضلع پر نقاط تماس کے درمیان فاصلہ ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر متناظر فاصلے ہو، تو ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ان دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے $\frac{1}{4}$ (ب + ج + ع) ہے۔

۷۔ اگر ایک ذوالربعہ الاضلاع کے راسوں سے دتروں 'م'، 'ن' پر

عمود 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو ثابت کرو کہ دتروں کے درمیانی زاویہ کی جیب

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{(ج+د)(ب+د)}{د} \right\} =$$

۷۸۔ اگر ا ب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہو تو کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو زاویوں ا اور ج کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع کو زاویوں ب اور د کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے ا د کے ساتھ حسب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\left\{ \frac{ج ب + د + ج ب + ا + ب}{ا + ج + ا + ج + د + ج + ا + ب} \right\}$$

۷۹۔ ا ب ج د ع ایک مستوی خمس ہے؛ یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں

ع ا ب، ا ب ج، ب ج د، ج د ع، د ع ا کے رقبے علی الترتیب
ا، ب، ج، د، ع کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ خمس کا رقبہ ا، مساوات

$$۱ - (۱ + ب + ج + د + ع) + ۱ + (ا + ب + ج + د + ع) = ۰$$

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۰۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$۱ ب ج د$$

$$(ج+د)(ب+د)$$

۸۱۔ ۲ ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہے، ان ضلعوں میں سے ۱ ن اضلاع کے مساوی ہیں اور ۱ ن اضلاع کے مساوی۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{4} (۱ + ۲ + ۱ ب ج + ۲ ب + ۲ ج + ۲ د)$$

۸۲ - ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع a, b, c ، وہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے؛ اس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے؛ ثابت کرو کہ اُس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر جو ان نصفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القواثم ہیں اور اس ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4} (a+b+c+d) \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

جہاں $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

۸۳ - ذواربعۃ الاضلاع $ABCD$ ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر EF ہے جو اس AC کے مقابل ہے۔ اگر اسے AB سے $ج$ پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود ان دائروں سے جو a, b پر ان کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں نقطوں P, Q پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $PQ = EF$ (جب $a = b$ جب $a = b$)

۸۴ - ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اُس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکوزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے۔ شلث ABC کے لیے ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ اور اُس جانبی دائرہ کی طاقت جو a کے مقابل ہے $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو شلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے۔

۸۵ - ایک مخمس کے ضلع a, b, c, d, e جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے،

ترتیب وار a, b, c, d, e ہیں۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ مساوات

$$L = \frac{1}{4} \{ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - (ac + bd + ce + da + eb) \}$$

$$+ (sa - we)(sb - de)(sc - ed)(sd - ea)(se - ab)$$

(223)

کی ایک اصل ہے جہاں $۲س = ا + ب + ج + د + ع$
 ۸۶ - ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ہے ایک منظم کثیر الاضلاع
 کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے
 چار متصلہ راسوں سے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کے درمیان
 رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$۲ر = (ا - ب - ج - د) (ب - ج - د) (ج - د - ا) (د - ا - ب - ج)$$

(۱ + ب - ج - د) (۱ + ج - د - ا) (۱ + د - ا - ب) (۱ + ا - ب - ج + د)
 ۸۷ - ایک محدب مخمس 'ا' ب ج د ع ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے،
 اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲س اور ۳س ہیں، اور ع اور 'ا' پر گئے
 زاویوں کا مجموعہ ۷ ہے، 'ا' اور ج پر گئے زاویوں کا مجموعہ ۷، اور د و 'ا' پر گئے
 ثابت کرو کہ

۲س (جب ۲ + + جب ۲ + ۲س (جب ۷ + + جب ۷) = ۰
 ۸۸ - 'ا' ب ج د ایک محدب ذواربعۃ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک
 دائرے کو مس کرتے ہیں اور راس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔
 مخمس کے حاطد دائرہ کے تماس نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر کھینچے گئے ہیں جن سے
 ایک دوسرا محدب ذواربعۃ الاضلاع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس آخری
 ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$۲ر = \frac{(س - ۲ - ا - ب - ج - د) (ا - ب - ج - د) (ب - ج - د - ا) (ج - د - ا - ب - ج)}{(۲ - ا - ب - ج) (۲ - ب - ج - د) (۲ - ج - د - ا) (۲ - د - ا - ب - ج)}$$

جہاں دائرہ 'ا' ب ج د کا نصف قطر ہے اور $۲س = ا + ب + ج + د$ اور

$$۲س = ۲ + ب + ج + د + ا + ب + ج$$

تیرہواں باب

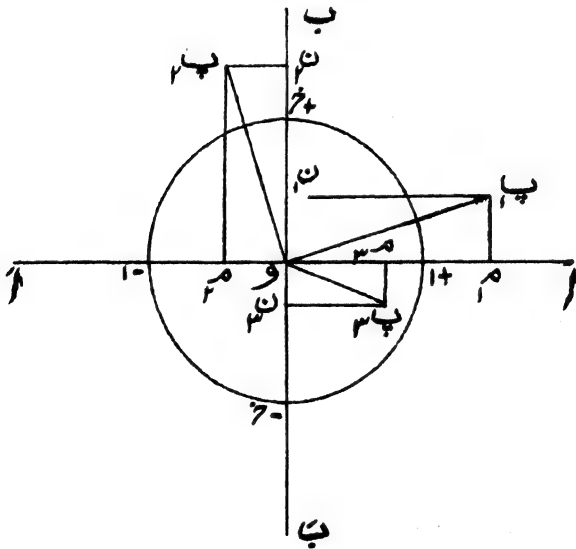
ملطف اعداد

۷۰۔ — جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ کے عددوں پر جنہیں ملطف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے۔ ہم اس باب میں اس طریقہ پر غور کریں گے جس میں ایسے ملطف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جاسکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ اس سلسلہ میں دائری تغاغل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں، اور فی الواقع ایسے تغاغلوں کا ادخال ضروری ہے تاکہ ملطف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں۔

ملطف عدد کی ہندسی تعبیر

۷۱۔ — ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک مثبت لا متناہی خط مستقیم اوپر پیمانہ کے مطابق طول و $= 1$ کسی معروف نقطہ سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا توہ کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خط مستقیم وہ ہے۔ اب خالص خیالی عدد χ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی ثابت ستوی میں جس میں α واقع ہے ایک ثابت خط مستقیم α اور β جو α پر عمود ہو، پھر β و β پر دو سے طول α = α یا β جو β یا β کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ثابت ہو یا منفی؛ تب ہم یہ خیال کریں گے کہ خیالی عدد χ ما نقطہ α سے تعبیر ہوتا ہے یا نیز خط مستقیم α سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوط مستقیم α اور β کو ان نقطوں پر قطع کریں گے جو عددوں ± 1 ، $\pm \chi$ کو تعبیر کرتے ہیں۔ ملطف عدد α + χ کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل α و β کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کریں گے کہ نقطہ β یا نیز خط مستقیم β ملطف عدد α + χ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ دو عددوں α اور χ کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوط مستقیم α و β ہیں جو علی الترتیب α اور χ کو تعبیر کرتے ہیں۔



شکل میں پ، ملف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا اور
ما دونوں مثبت ہیں؛ پ، ملف عدد لا + خ ما کو جس میں لا منفی
ہے اور ما مثبت؛ پ، عدد لا + خ ما کو جس میں لا مثبت ہے اور
لا منفی۔ ا و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور ب و ب کو خیالی محور۔

۱۷۲۔ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے
اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو
و ا سے مخالف سمت ساعت ناپا جاتا ہے۔ تب

$$\text{لا} = \text{رجم ط، ما} = \text{رجم ط، ی} = \text{لا} + \text{خ ما} = \text{ر (رحم ط + خ جب ط)}$$

$$\text{جہاں } \text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \quad \text{ط} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

عدد $\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملف عدد لا + خ ما کا
مقیاس کہتے ہیں اور زاویہ ط کو اس ملف عدد کی دلیل یا وجہ۔
پس خط مستقیم و پ جو اس ستوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا
ہو مطلق طول کی اور سمت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک
ملف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے۔ عدد لا + خ ما کو
اس ستوی کے کسی اور خط مستقیم سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے جو
و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ
ایسا خط مستقیم لا + خ ما کے مقیاس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا
ہے۔

(226)

۱۷۳۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ، آ سے ابتدا کر کے
اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ منقسم
کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ہے؛ تب اس ملف عدد
کا مقیاس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا
ہے لیکن دلیل جبری طور پر - π سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ سے گزرتا ہے ملف عدد لا + خ ماک کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس کی دلیل میں π^2 کے ضعف کے اضافہ سے یہ ملف عدد نہیں بدلتا۔ یہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)
جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دوری (Periodic) ہے۔
کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اس قیمت کو جو π اور π^2 کے درمیان واقع ہوتی ہے دلیل کی صدر قیمت کہہ سکتے ہیں؛ اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کریں گے تو اس سے مراد یہی صدر قیمت ہوگی۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا مس $\frac{1}{\pi}$ کی صدر قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸)؛ کیونکہ لا + خ ماک ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم رہتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت π اور π^2 کے درمیان ہوتی ہے۔

اس مفہوم میں ایک مثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک مثبت خیالی عدد کی دلیل $\frac{\pi}{2}$ ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل $-\frac{\pi}{2}$ ، لیکن منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالا بہم ہے کیونکہ یہ π ہے یا $-\pi$ ، لیکن ہم اس کو π ہی خیال کریں گے۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا - خ ما کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن ان کی دلیلیں ط اور - ط ہیں۔

لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر متی (لا + خ ما) سے یا لا + خ ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
۴۷ — اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ حقیقی متغیر لا جبکہ لا سے لاکھ مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے

(227)

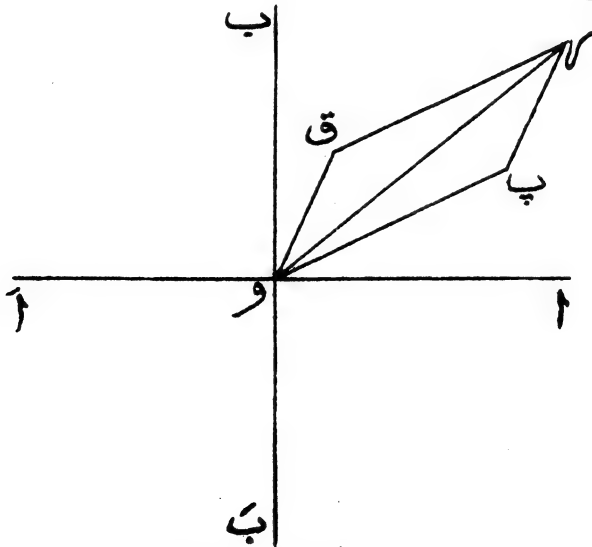
ایک جٹ میں سے گزر سکتا ہے، لیکن ملف متغیر لا + خ ما کی یہ کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کر کے بھی کہ لا اور ما دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لا انتہا طریقے ہیں جن میں ملف متغیر لا + خ ما قیمت لا + خ ما سے لا + خ ما تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا سے لا تک لا کا مسلسل اضافہ ہا سے ما تک ما کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ اور پ' لا انتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جاسکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ پ اور پ' کو ملا نیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا سے لا تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں مقید ہو جاتی ہے؛ اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔

ہم اس ممکنہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً ایک ہندی ہے، لیکن ایک ملف عدد دو ہندی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو ہندی فضاء چاہیے۔ ملف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کر نیکا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۸۵ء میں کہوں (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کو تھی، گاس، رین اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تغالوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

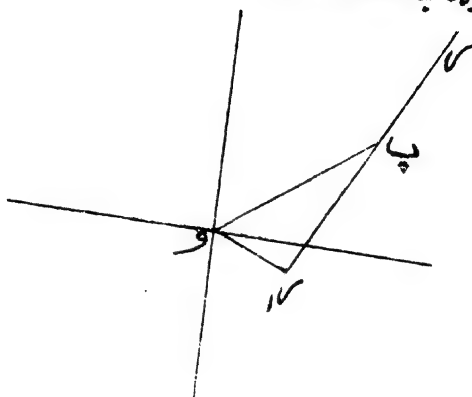
ملف عددوں کی جمع

۵۷۱۔ فرض کر دو ملف عددوں لا + خ ما، لا + خ ما کو

نقطہ پ، ق، تبغیر کرتے ہیں؛ متوازی الاضلاع و پ س ر ق کی تکمیل کرو؛ تب و س کا ظل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ س ر یا و پ، وق کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے؛ اس لیے نقطہ س، دو دئے ہوئے ملطف عددوں کے مجموعہ (لا + لا) + خ (لا + لا) کو تبغیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملطف عددوں کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ان ملطف عددوں کو تبغیر کر نیوالے خطوط مستقیم کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوط مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملطف عدد کو تبغیر کرتے ہیں، مثلاً پ س ر جو پ سے وق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملطف عدد لا + لا کو تبغیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کو یوں بیان کر سکتے ہیں :- دسے خط مستقیم و پ کھینچو جو لا + لا کو تبغیر کرے اور پھر پ سے پ س کھینچو جو لا + لا کو تبغیر کرے؛ و س کو ملاؤ؛ تب و س، یا نقطہ س، حاصل جمع (لا + لا) + خ (لا + لا) کو تبغیر کریگا۔



سمت میں ہوگا تب مطلوبہ حاصل تفریق یا فرق خط و س را سے یا نقطہ س را سے تعبیر ہوگا۔



لمف عددوں کی ضرب

۱۷۸ — دو عددوں $لا + خ ما، لا + خ ما، لا + خ ما$ کا حاصل ضرب

$(لا لا - ما ما) + (لا ما + لا ما)$

اور اگر ہم $لا + خ ما، لا + خ ما، لا + خ ما$ کی بجائے

$پ (جم ط + خ جب ط)، پ (جم ط + خ جب ط)$

رکھیں تو ان کا حاصل ضرب لکھا جاسکتا ہے

$پ (جم ط + خ جب ط) + (جم ط + خ جب ط)$

اس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کے مساوی

مقیاس ان عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر لا + خراب + لا + خراب کی دلیلوں کی صدر قیمتیں ط، ط ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت ط + ط ہو۔

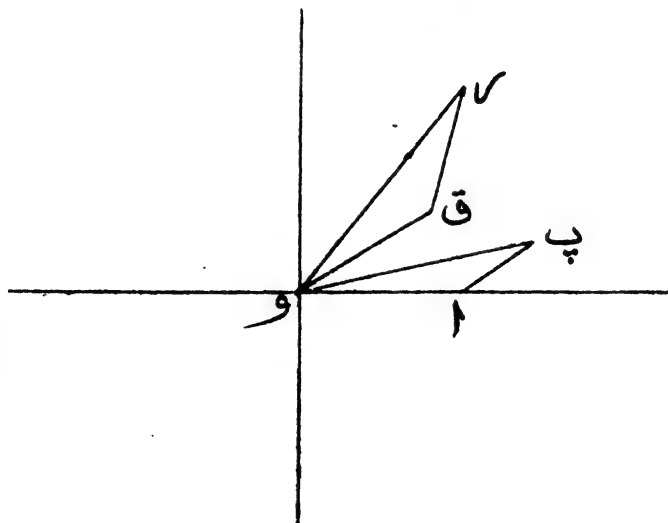
اب ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل کر سکتے ہیں: فرض کرو کہ 'ا'، 'پ'، 'ق'، 'تین عددوں 'ا'، 'لا'، 'خ'، 'ما'، 'لام' کو تعبیر کرتے ہیں: 'ا' کو بلاؤ، 'وق' پر ایک مثلث قی دس اس طرح بناؤ کہ وہ 'اوپ' کے مشابہ ہو

اور زاویہ قی و سر = ط + ط ،

تب زاویه مساوی $\angle P = \angle Q$

اور نیز و س : وق = و پ : و ا

پس دوسرا کا طول طولوں واپ اور وق کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ سر، حاصل ضرب $(\lambda + x)$ $\times (\lambda + x)$ کو تعبیر کرتا ہے۔



اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی لائے + خ م = م (جم ط + خ جب ط)
شامل کریں تو

$$(لا + خ م) (لا + خ م) (لا + خ م)$$

$$= م م م (جم ط + ط + ط) + خ جب (ط + ط) \{جم ط + خ جب ط\}$$

$$= م م م (جم ط + ط + ط) + خ جب (ط + ط + ط) \{جم ط + ط + ط\}$$

اسی طرح چار یا زیادہ ملطف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231)

ن ملطف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + خ م) (لا + خ م) \dots (لا + خ م)$$

$$= م م م \dots م (جم ط + ط + \dots + ط) + خ جب (ط + \dots + ط) \{جم ط + \dots + ط\}$$

یا ملطف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب نکالنا

مقیاس ان کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے

اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل ان کی دلیلوں کے

مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ ملطف عددوں کے کسی جٹ

کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورہ بالا دو عددوں

کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جاسکتی ہے۔

ایک ملطف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

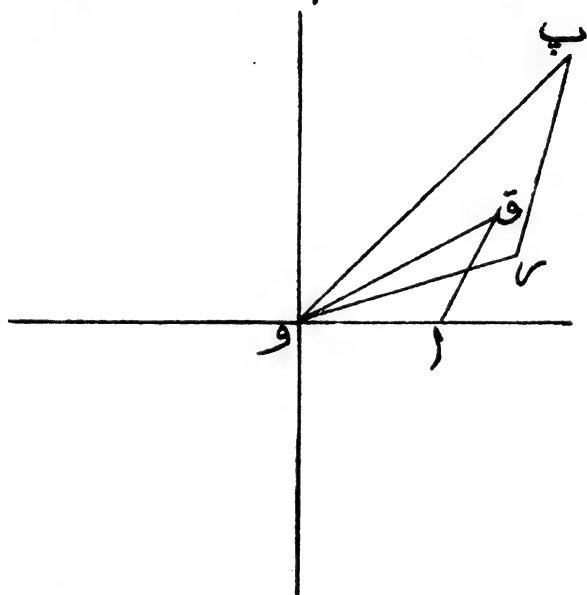
$$۱۷۹ — خارج قسمت (لا + خ م) \div (لا + خ م)$$

$$\frac{1}{p} = \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p} \right\} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{1}{p} = \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right)$$

یا پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقياس ان کے مقياسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق (۱+۲) کو



(282) کو نقطہ ۱ (۱+۱) سے ملاؤ، اور مثلث و ر ب کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث و ا ق کے تشابہ ہو اور زاویہ و ر ب کا ناپ - ط ہو۔ تب زاویہ و ر ب = ط - ط اور و ر = و ق۔ اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

ملف عددوں کی قوتیں

۱۸۰۔ — اگر مساوات (۱) میں دائیں جانب کے سب اجزائے ضربی کو لا + خ ما کے مساوی رکھیں تو ضابطہ ملتا ہے

$$(لا + خ ما)^ن = ر (جم ن ط + خ جب ن ط)$$

پس کسی ملف عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس اس دیے ہوئے عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت کے برابر ہے اور اس کی دلیل دیے ہوئے عدد کی دلیل کی ن گنا ہے۔ عدد ن سے یہاں کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے۔

ملف عدد کی کسی مثبت قوت کی قیمت ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ پ (لا + خ ما) کو ۱ + ۱ سے ملایا گیا ہے؛ وپ پر مثلث وپ پ بناؤ جو وپ کے تشابہ ہو، وپ پ پر مثلث وپ پ بناؤ جو اسی مثلث کے تشابہ ہو، اور علیٰ ہذا القیاس۔ تب وپ، وپ، وپ، ...، وپ کے طول علی الترتیب ر، ر، ر، ...، ر ہیں اور زاویے پ، وپ، وپ، ...، وپ علی الترتیب ط، ط، ط، ...، ط ہیں پس نقطے پ، پ، پ، ...، پ علی الترتیب عددوں (لا + خ ما)، (لا + خ ما)، ...، (لا + خ ما) کو تعبیر کرتے ہیں۔

مخصوص صورت ر = ۱ میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(جم ط + خ جب ط)^ن = ر (جم ن ط + خ جب ن ط)$$

اور اگر ق سے جم ط + خ جب ط تعبیر ہو تو نقطے ق، ق، ق، ...، ق جو جم ط x خ جب ط کی مختلف قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی نصف قطر کے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور اس طرح کہ کسی دو متصل نقطوں کے

کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ط بنتا ہے۔
۱۸۱ — قوت نماؤں کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت

صحیح عدد ہو تو جملہ (لا + خ ما) سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن دیں
قوت لا + خ ما ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقیاس کی ن دیں قوت
اُس عدد کی ن دیں قوت کا مقیاس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقیاس
حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے (لا + خ ما) کا مقیاس ما ہے
جہاں ما، مقیاس کا حقیقی مثبت ن واں جذر ہے۔ فرض کرو کہ
(لا + خ ما) کی ایک قیمت ما (جم ذ + خ جب ذ) ہے تو

$$ر (جم ذ + خ جب ذ) = ر (جم ط + خ جب ط)$$

$$یا جم ن ذ + خ جب ن ذ = جم ط + خ جب ط$$

(238)

$$اس لیے جم ن ذ = جم ط، جب ن ذ = جب ط$$

$$یا ن ذ = ط + س ۲ س ۳$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(لا + خ ما) \frac{1}{ن}$$

$$کی ایک قیمت ہے ما = \left\{ جم ط + س ۲ س ۳ + خ جب ط + س ۲ س ۳ \right\} \frac{1}{ن}$$

کیونکہ اس جملہ کی ن دیں قوت لا + خ ما کے مساوی ہے۔ اوپر کے استدلال
سے یہ ظاہر ہے کہ (لا + خ ما) کی ہر قیمت مندرجہ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔
اگر س کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ... دی جائیں تو ان قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$جم ط + س ۲ س ۳ + خ جب ط + س ۲ س ۳ \frac{1}{ن}$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں س، س کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{جم } \frac{\pi_1 س_1 + ط}{ن} = \text{جم } \frac{\pi_2 س_2 + ط}{ن}$$

$$\text{اور جب } \frac{\pi_1 س_1 + ط}{ن} = \text{جب } \frac{\pi_2 س_2 + ط}{ن}$$

$$\text{یعنی } \frac{\pi_1 س_1 + ط}{ن} = \pi_2 ک_2 = \frac{\pi_2 س_2 + ط}{ن}$$

$$\text{یا } س_1 - س_2 = ن ک$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر س اور س دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے (جم ط + خر جب ط) کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت س ہو تو صفر اور ن کے درمیان ایک عدد س کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ س - س، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت س = س کے لیے وہی ہے جو س = س کے لیے ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ (لا + خر) کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$ن، (جم \frac{\pi}{ن} + خر جب \frac{\pi}{ن})، ن، (جم \frac{\pi}{ن} + ط) + خر جب \frac{\pi}{ن}$$

$$، \dots، ن، (جم \frac{\pi}{ن} + ط + (1-ن) \frac{\pi}{ن}) + خر جب \frac{\pi}{ن}$$

سے ملتی ہیں جو اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں $\frac{1}{n}$ حقیقی اور مثبت ہے۔

۸۲۔ اگر $\lambda + \chi$ کی دلیل کی صدر قیمت ط ہو یعنی دلیل کی وہ قیمت جو π اور π کے درمیان واقع ہے تو ہم $(\lambda + \chi) \frac{1}{n}$ کی صدر قیمت کو جملہ

(284)

٣٧ (م. ط + خ جب ط)

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جملوں $\text{جم} + \text{خ جب ط}$ ، $\text{جم} (\text{ط} + \pi^2)$ ، $\text{خ جب} (\text{ط} + \pi^2)$ کے ان ویں جذروں کی صدر قیمتیں $\text{جم} \frac{\text{ط}}{n} + \text{خ جب} \frac{\text{ط}}{n}$ ، $\text{جم} \frac{\text{ط} + \pi^2}{n}$ ، $\text{خ جب} \frac{\text{ط} + \pi^2}{n}$ ، ...، متصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے $(\lambda + \text{خ} + \frac{1}{n})$ کی مختلف قیمتیں ر اور ط کے تناظر جملوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل ط کی n مختلف قیمتیں لی جائیں۔ $(\lambda + \text{خ} + \frac{1}{n})$ کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں ط کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر $\frac{1}{\pi}$ ایک مثبت حقیقی مقدار ہے تو $\frac{1}{\pi}$ کی دو قیمتیں π (جم + خ جب) اور π (جم + خ جب π) ہیں یعنی π اور π کا مثبت جذور $\frac{1}{\pi}$ ہے،
(- $\frac{1}{\pi}$ کی قیمتیں جس میں $\pi = \pi$ ، یہ ہیں π (جم + خ جب $\frac{1}{\pi}$ π)

$$\pi \frac{3}{2} (\text{مجم} + \text{خوب})$$

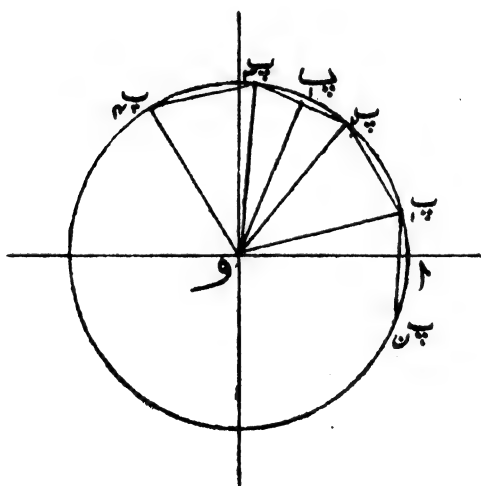
یا خزانہ - خزانہ' $\frac{1}{2}$ کی صد قیمت ماو ہے اور (-1) کی صد قیمت خزانہ

۱۸۳ — دفعہ ۱۸۱ کے جملوں میں $۱ = ۱$ ، $۱ = ۱$ رکھنے سے

(285)

۱۸۴ — اب ہم یہ دکھائی گئے کہ ایک ملطف عدد کے ن میں جذروں کو ہندسی طور پر کسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے؛ اس ہندسی طریقہ سے ن میں جذر کی ن مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمومیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ (جم ط + خ جب ط) کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ پ، ا سے جس پر ط =، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ مرتسم کرتا ہے، تب پ کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ پ و ا جو و پ سے مرتسم ہوا ہے ط ہے فقط پ، جملہ جم ط + خ جب ط کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ پ، ا سے اسی آن چلتا ہے جس آن پ نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاوئی رفتار ہمیشہ پ کی رفتار کا $\frac{1}{n}$ رہتی ہے اور اس لیے زاویہ پ و ا ہمیشہ $\frac{ط}{n}$ کے مساوی رہتا ہے۔ تب پ، جم $\frac{ط}{n} + خ$ جب ط کو تعبیر کرتا ہے۔ جب، پ اولاً کسی محل پ پر پہنچتا ہے تو



معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو n مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں n ضلعوں والا ایک منتظم اکثر الاضلاع قیضیجے کا سوال اس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات $1 = 0$ کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے :-

(۱) جبکہ $n = 2$ کی کوئی قوت ہو مثلاً جبکہ $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 32 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 49$

(۲) جبکہ n شکل $2^k + 1$ کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ $n = 2^5 + 1 = 33$

اس کو گاس نے اپنی کتاب "Disquisitiones arith." میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ n شکل $2^k + 1$ کے متعدد مفرد عددوں اور 2 کی کسی قوت کا

حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ $n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 32 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 49$

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت $n = 2^k + 1$ پر بحث کی ہے جہاں جب $\frac{2^k + 1}{2}$ کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

ڈیموائر کا مسئلہ

(237)

۱۸۶۔ م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے $\text{جم } m$ ط

$+ \text{خ جب } m \text{ ط} = (\text{جم } ط + \text{خ جب } ط) m$ کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے دفعات ۱۸۰

اور ۱۸۱ میں ان دو صورتوں $m = n$ اور $m = \frac{1}{n}$ کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ n ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں ان صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ $m = \frac{f}{q}$ ، یعنی جبکہ m ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ m ایک مثبت غیر منطقی عدد ہو اور آخر بالا امر (۳) جبکہ m کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ (جم ط + خ جب ط) $\frac{f}{q}$ = (جم ف ط + خ جب ف ط) $\frac{f}{q}$ اور اس کی ایک قیمت جم ف ط + خ جب ف ط ہے۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ m ایک مثبت منطقی عدد ہو۔

یہ ذہن نشین رہے کہ (جم ط + خ جب ط) $\frac{f}{q}$ کی قیمتیں سب کی سب جملہ جم ف (ط + ۲س) $\frac{f}{q}$ + خ جب ف (ط + ۲س) $\frac{f}{q}$

سے ملتی ہیں جس میں $s = 1, 2, 3, \dots, q-1$ اور $\frac{f}{q}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ایک منطقی کسر ہو۔

اگر m ایک منطقی عدد نہیں ہے تو اس کی تعریف ہمیشہ نامحدود مختلف طریقوں سے منطقی عددوں m, m, m, \dots کے ایک مستند تواتر کی انتہا کے طور پر کی جاسکتی ہے۔ ایسے مستند تواتر میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر صہ اختیاری طور پر انتخاب کردہ کوئی منطقی عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو s ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے ایسا کہ m_s اپنے بعد والوں m_{s+1}, m_{s+2}, \dots میں سے ہر ایک سے مطلق قیمت میں اس قدر فرق رکھے جو صہ سے کم ہو۔ اگر r کوئی مثبت حقیقی عدد ہے تو r کی

خاص قیمت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ مستحق تو اترے گا، رُکے گا، رُکے گا...، رُسے گا... کی انتہا ہے جہاں ان میں سے ہر عدد حقیقی اور مثبت ہے اور رُس اپنی خاص قیمت رکھتا ہے۔ یہ معلوم ہے کہ یہ تو اتر مستحق ہے اور اس کی ایک انتہا ہے جو منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر کے تابع نہیں ہے جو (تواتر) غیر منطق عدم کی تعریف کے لیے استعمال ہوا ہے۔

اگر 'م' متلف عدد ہو (حجم ط + خ جب ط) کو تعبیر کرے تو 'ی' کی ایک قیمت کی تعریف جبکہ 'م' ایک غیر منطقی عدد ہو اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ تواتر

رکا (حجم ط + خ جب ط) 'ا' رکا (حجم ط + خ جب ط) 'ا' رکا (حجم ط + خ جب ط) 'ا' رکا (حجم ط +

خر جب ط' اس، ... کی انتہا ہے جس میں رس اپنی خاص قیمت رکھتا ہے اور اس کی تمام قیمتوں کے جواب میں تناظر قیمتیں (حم ط + خر جب ط) اس کو دی گئی ہیں۔ اس تعریف کے جواب میں ی کی ایک قیمت تواثر رک (حم م ط + خر جب م ط) رک (حم م ط + خر جب م ط) ...، رس (حم م ط + خر جب م ط) کی انتہا ہے۔ چونکہ رس ← رک

اور حجم م ط + خ جب م ط ← حجم م ط + خ جب م ط (اس امر کی وجہ سے کہ حجم م ط اور جب م ط، م کے مسلسل تفاعل ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ ی کی ایک قیمت را (حجم م ط + خ جب م ط) ہے، اور (حجم م ط + خ جب م ط) کی ایک قیمت حجم م ط + خ جب م ط ہے۔

۱۷ اس کے ثبوت کے لیے دو مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable کا صفحہ ۴۴ دیکھو۔ اس کتاب کے پہلے باب میں غیر منقطع عددوں کے نظریہ پر مکمل بحث کی گئی ہے۔

پس دیوائر کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔

(حم ط + خر جب ط) م کی عام قیمتیں ہیں

جم م (ط + ۲ س ۲) + خر جب م (ط + ۲ س ۲)

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م (س۔س) ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

(حم ط + خر جب ط) م کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ی م کی تعریف جس کی بموجب اس کی قیمتیں جملہ

را {جم م (ط + ۲ س ۲) + خر جب م (ط + ۲ س ۲)}

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اسی طرح درست ہیں۔

اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد۔ ک ہو تو

$$(\text{حم ط} + \text{خر جب ط}) \text{ م} = \frac{1}{(\text{حم ط} + \text{خر جب ط}) \text{ م}}$$

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

$$\text{جم م ط} + \text{خر جب م ط} \text{ یا } \text{جم م ط} - \text{خر جب م ط}$$

ہے جو جم م ط + خر جب م ط کے مساوی ہے۔ اس طرح دیوائر کا مسئلہ

کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

(جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط)

= جم (ط + ط + ... + ط) + خ جب (ط + ط + ... + ط)

سے جو ڈیموئیر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۲۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط جم ط ... جم ط (۱ + خ مس ط) (۱ + خ مس ط) ... (۱ + خ مس ط)

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (۱ - م + م - ...)

جب (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (م - م + م - ...)

جہاں م سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن ماسوں میں سے س، س ماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔ (289)

وفعہ ۱۷ کے مسئلے (۲۹)، (۳۰)، (۳۱) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط

= (جم ط + خ جب ط) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ شنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط) = جم ن ط + خ جب ن ط

اور اس لیے نیز (جم ط - خ جب ط) = جم ن ط - خ جب ن ط۔ ان سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں جن $n ط = \frac{1}{p} (جم ط + خ جب ط) + \frac{1}{p} (جم ط - خ جب ط) ،$

خ جب $n ط = \frac{1}{p} (جم ط + خ جب ط) - \frac{1}{p} (جم ط - خ جب ط)$

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ ۱۱ میں آچکا ہے کہ

$$۱ + لا جم ط + لا جم ۲ ط + ... + لا جم n ط + ...$$

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا بیانہ ۱-۲ لا جم ط + لا ہے۔ جن $n ط$ کو $ع$ سے تعبیر کر دو $ع - ۲ جم ط = x ع - ۱ ع - ۲ = ۰$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو

$ع = k$ جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو k کے لیے ہمیں دو درجی مساواتیں $k^۲ - ۲ جم ط + ۱ = ۰$ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں $k = جم ط \pm خ جب ط$ ہیں

پس $ع = (جم ط + خ جب ط) + ب (جم ط - خ جب ط)$ اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو $ع$ میں ہے۔ $n = ۱$ اور $n = ۲$ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $k = ب = \frac{1}{p}$ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جن $n ط$ کے لیے اوپر دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جن $n ط$ کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸۔ اب ہم لا۔ (۱ + خ ب) کو لا کے لحاظ سے n خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا (۱ + خ ب)

(جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط)

= جم (ط + ط + ... + ط) + خ جب (ط + ط + ... + ط)

سے جو ڈیوٹر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متانلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط جم ط ... جم ط (۱ + خ مس ط) (۱ + خ مس ط) ... (۱ + خ مس ط)

میں لکھ سکتے ہیں پس اس متانلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (۱ - م + م - ...)

جب (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (م - م + م - ...)

جہاں م سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن ماسوں میں سے س، س ماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔

(239)

دفعہ ۱۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۳) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط

= (جم ط + خ جب ط) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ شنائی کی مدد سے پھیلا یا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط) = جم ن ط + خ جب ن ط

اور اس لیے نیز (جم ط - خ جب ط) = جم ن ط - خ جب ن ط۔ ان سے ہمیں ضابطہ

حاصل ہوگیں۔ $\text{جم ن ط} = \frac{1}{4} \cdot (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) + \frac{1}{4} \cdot (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$ ،

$\text{خر جب ن ط} = \frac{1}{4} \cdot (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) - \frac{1}{4} \cdot (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ اوہ میں آچکا ہے کہ

$$1 + \text{لاجم ط} + \text{لا}^2 \text{جم ط} + \dots + \text{لا}^n \text{جم ن ط} + \dots$$

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ $1 - 2 \text{لاجم ط} + \text{لا}^2$ ہے۔ جم ن ط کو ع ن سے تعبیر کرو تو $\text{ع ن} - 2 \text{جم ط} + \text{ع ن} - 1 + \text{ع ن} - 2 = 0$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو

$\text{ع ن} = 1$ کہ جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو کہ کے لیے ہمیں دو درجی مساوات

$1 - 2 \text{جم ط} + 1 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کی اہلیں کہ $\text{جم ط} = \pm \text{خر جب ط}$ ہیں

پس $\text{ع ن} = 1 + (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) + \text{ب} \cdot (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$

اس مساوات کا مکمل حل ہے جو ع ن میں ہے۔ $1 = \text{ن}$ اور $2 = \text{ن}$ رکھنے سے ہم دیکھتے

ہیں کہ $1 = \text{ب} = \frac{1}{4}$ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن ط کے لیے اوپر

دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸۔ اب ہم لا ۔ $(1 + \text{خر ب})$ کو لا کے لحاظ سے خطی

اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر $\text{لا} (1 + \text{خر ب})$

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی قیمتیں ق،
ق، ق، ق، ...، ق سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{لا۔} (1 + \text{خر ب}) = (\text{لا۔ ق}) (\text{لا۔ ق،}) \dots (\text{لا۔ ق،})$$

کیونکہ جب لا۔ ق = ۰ تو لا۔ (1 + خر ب) معدوم ہوتا ہے اور اس لیے

لا۔ ق ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیے۔ اس طرح ہمیں ن

مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ان سے زیادہ

اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو ۱ = رجم ط، ب = رجب ط تو لا۔ ۱)

+ خر ب کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\left\{ \frac{\pi s^2 + ط}{ن} + \text{خر جب} \right\}^{\frac{1-n}{s}} = \frac{\pi s^2 + ط}{ن}$$

$$\text{جہیں غہ} = \frac{1}{n} = \frac{1}{s} (1 + \frac{1}{s})^{\frac{1}{n}}$$

اس نتیجے سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں

حاصل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔

(240)

(۱) فرض کرو ۱ = ۱، ب = ۰ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\pi s^2}{ن} - \frac{\pi s^2}{ن} \right)^{\frac{1-n}{s}} = \frac{\pi s^2}{ن}$$

$$\pi s^2 = \frac{\pi (s-n)^2}{ن} + \frac{\pi s^2}{ن} \quad \text{اور چونکہ}$$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(1-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) = 1-l$$

$$\left(\frac{\pi s^2}{n} - \text{خر جب} \frac{\pi s^2}{n} \right) \left(\frac{\pi s^2}{n} + \text{خر جب} \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(1-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) =$$

$$\left(1 + \frac{\pi s^2}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n})$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(2-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l)(1-l) = 1-l$$

$$\left(1 + \frac{\pi s^2}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n})$$

(۲) فرض کرو $1-l = b$. تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(3-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l) = 1+l$$

$$\left(1 + \frac{\pi(1+s^2)}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi(1+s^2)}{n})$$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(2-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l) = 1+l$$

$$\left(1 + \frac{\pi(1+s^2)}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi(1+s^2)}{n})$$

$$(3) \quad l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n} + 1$$

$$= (l^2 - \text{خر جب ط} - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n} + \text{خر جب ط})$$

$$\frac{1-n}{4} = \frac{s}{n} \quad \prod_{s=1}^n \left(\frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} - \text{خر جب} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right) \left(\frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} + \text{خر جب} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right)$$

$$\frac{1-n}{4} = \frac{s}{n} \quad \prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n})$$

یا لاکہ بجائے $\frac{1}{2}$ رکھنے اور طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ جم } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

(۴) اس آخری نتیجہ سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ جم } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

رکھو $\frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} + \text{خ جب } \frac{1}{2}$ ، تو $\frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} - \text{خ جب } \frac{1}{2}$
 اور $\frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} + \text{خ جب } \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} - \text{خ جب } \frac{1}{2}$
 اس لیے، $\frac{1}{2}$ کون $\frac{1}{2}$ میں بدلنے سے،

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ جم } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} - \text{خ جب } \frac{1}{2}$$

(241)

دائرہ کے خواص

۱۸۹۔ دفعہ مابقی کے اجزائے ضربی والے ضابطوں کے ذریعہ دائرہ کے بعض مشہور خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ نصف قطر کے ایک دائرہ میں n ضلعوں والا ایک کثیرالاضلاع n کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ دائرہ کے ستوی میں p کوئی نقطہ

اور اس کا فاصلہ دائرہ کے مرکز و سے ج ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ
 پ و ا کو ط سے تعبیر کیا گیا ہے، تب زاویے پ و ا پ و ا ...
 علی الترتیب ط + ۲۲ \ ن، ط + ۲۲ \ ن، ... ہیں۔ اس لیے

پ ا پ ا پ ا ... پ ا = $\frac{1}{2} \{ (2 - 2) \text{ راج جم } (ط + \frac{2}{2} \text{ ن}) + \frac{2}{2} \}$
 پس ہمیں مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$پ ا پ ا پ ا ... پ ا = \frac{1}{2} \{ 2 - 2 \text{ راج جم } (ط + \frac{2}{2} \text{ ن}) \}$$

جو دائرہ کی ڈیموائر کی خاصیت کے نام سے مشہور ہے۔

اُس صورت میں جبکہ پ محیط پر ہو مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$پ ا پ ا پ ا ... پ ا = \frac{1}{2} \{ 2 \text{ راج جم } (ط + \frac{2}{2} \text{ ن}) \}$$

اُس صورت میں جبکہ پ نصف قطر و ا بر ہو ط صفر ہوتا ہے اور مسئلہ

ہو جاتا ہے

$$پ ا پ ا پ ا ... پ ا = \frac{1}{2} \{ 2 \text{ راج جم } (ط + \frac{2}{2} \text{ ن}) \}$$

نیز اگر پ، زاویہ ا و ا کے ناصف پر واقع ہو تو ط = $\frac{2}{2}$

اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$پ ا پ ا پ ا ... پ ا = \frac{1}{2} \{ 2 \text{ راج جم } (ط + \frac{2}{2} \text{ ن}) \}$$

یہ آخری دو صورتیں دائرہ کی کوٹ (Cote) کی خاصیتیں کہلاتی ہیں۔

مثالیں

—۱۹۰

(۱) $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$ کو جزوی کسور میں بیان کر دجہاں m ایک صحیح عدد ہے n سے چھوٹا۔

اگر مساوات $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = 0$ کی ایک اصل عد ہو تو جزو ضربی λ ۔ بعد کے

جواب میں جزوی کسر ہے $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}}$ اور اس لیے عد کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}}$$

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}^2}$$

اگر n طاق ہو تو مزید کسر $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$ حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر n طاق ہے تو

(242)

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}^2}$$

اور اگر n جفت ہے تو

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1+\lambda}^2}$$

(۲) $\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}$ کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر کم، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{(\frac{\pi^2}{6} + p) - 1}{1 + (\frac{\pi^2}{6} + p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1 - (\frac{\pi^2}{6} + p)}{1 + (\frac{\pi^2}{6} + p)}$$

کسر $\frac{(1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - n^2) - (1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - n^2)}{(1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - n^2) - (1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - n^2)}$ کا نسب نما اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے

ادب پھر ہر جز و ضری کے تناظر کسر شمال (۱) کے مطابق معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ

$$(1) \frac{\sum_{n=1}^{n-1} \frac{n \text{ جب } n}{\text{جب } n}}{\text{جم } n - \text{جم } n} = \frac{1}{\text{جم } n - \text{جم } n} \times \frac{n \text{ جب } n}{\text{جب } n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n) \pi_2 + (f)}{(n) \pi_2 + (f) + (g)} = \frac{1}{(g)} \times \frac{(n) \pi_2 + (f)}{(g)}$$

(۱) کی دائیں جانب کا جملہ، حجم طہ کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے

مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ مساوات (ب) (۱) کی طرفیں کو ف کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے، یا دوسرے الفاظ میں ف کو ف + ہ میں بدل کر مساوات کی طرفیں میں ہ کے سروں کو مساوی رکھتے

(۵) اگر $\text{حجم ط} + \text{حجم فہ} + \text{حجم پ} = ۰$ ، اور $\text{جب ط} + \text{جب فہ} + \text{جب پ} = ۰$ ۔

$$\text{جم } ۳ط + \text{جم } ۳ز + \text{جم } ۳پ - \text{جم } (ط + ز + پ) = ۰.$$
$$\text{جب } ۳ \text{ ط} + \text{جب } ۳ \text{ ف} + \text{جب } ۳ \text{ پ} - \text{جب } ۳ \text{ (ط + ف + پ)} = ۰$$

151

جہاں $r = \frac{1}{p} (n-1)$ یا $\frac{1}{p} n - 1$ اور s مساوی ہے ایمان کے بموجب اس کے کہ
 ن طاق ہے یا جفت -
 ۴ - ثابت کر دو کہ

$$r \text{ جب } \frac{1}{p} (r-j) \text{ جب } \frac{1}{p} (j-e) \text{ جب } \frac{1}{p} (e-b) \text{ جب } (f+q+b+r) \\ = \text{جب } \{ (n+1) - e - \frac{1}{p} (b+j) \} \text{ جب } \frac{1}{p} (b-j) + \dots$$

جہاں r اُس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ف، ق، ر کی تمام ایسی صحیح عددی قیمتوں
 (بشمول صفر) کے لیے لیا گیا ہے کہ $f + q + r = n$

۵ - اگر p ایک نسبت صحیح عدد ہو اور مساوات $\frac{1}{p} n =$ اکی اعلیٰ e, b, j, r ... ہوں
 اور n ، ایک سے بڑی کوئی عددی مقدار ہو تو ثابت کر دو کہ $\frac{1}{p} n + \frac{1}{p} n + \frac{1}{p} n + \dots$
 کی حقیقی قیمت صرف $\frac{1}{p} n$ \ $\frac{1}{p} n$ مس ہے -

$$۶ - \text{اگر } (1 + \frac{1}{p}) = f + f + f + \dots + f + \frac{1}{p} n$$

تو ثابت کر دو کہ $f - f + f - \dots = \frac{1}{p} n$ جم $\frac{1}{p} n$

$$f - f + f - \dots = \frac{1}{p} n \text{ جب } \frac{1}{p} n$$

۷ - اگر $\frac{1}{p} n, \dots, \frac{1}{p} n$ وہ تناظر اعلیٰ ہوں جو مساوات $\frac{1}{p} n - \frac{1}{p} n$ جم $\frac{1}{p} n$

$+1 =$ کی اصلوں کے مزدوج جوڑوں سے منتخب کی گئی ہیں اور اگر

$$f (e) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p} n \text{ لا جم } (e + \frac{1}{p} n)$$

تو ثابت کر دو کہ

$$f (e) = f (e) \dots f (e) = \frac{1}{p} n \left(\frac{1}{p} n \right) - \left[f \left(\frac{1}{p} n + \dots + \frac{1}{p} n + \frac{1}{p} n \right) \right]$$

۸۔ اگر e ، b ، j ، z ، v کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیوب کا مجموعہ اور نیز ان کی جیوب کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{حجم } ۴ \text{ عد} = \sum \frac{1}{p} - (\sum \text{حجم } ۲ \text{ عد}) - \sum \frac{1}{p} (\text{حجم } ۲ \text{ عد})^2$$

کو پورا کرتی ہیں یہ ہیں لا = مس $\frac{\pi(1+2)}{n^2}$ جس میں کوئی صحیح عدد ہے۔
۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{\pi(1+2)}{n^2}}{1+2} = \frac{\frac{\pi(1+2)}{n^2}}{1+2} = \frac{\pi(1+2)}{n^2(1+2)}$$

$$\frac{\pi}{1+2} = \text{جس میں } \pi$$

۱۳ - اگر ضریب سے ان حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

مس^۱، مس^۲، مس^۳، ...، مسⁿ (۱+۲) کے برابر ہیں، جس سے س، س، مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار مس^۱ (۱+۲) کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$\frac{\pi(1+2)}{n^2} = \frac{\pi(1+2)}{n^2} \times \frac{\pi(1+2)}{n^2}$$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\pi(1+2)}{n^2} = \frac{\pi(1+2)}{n^2} \times \frac{\pi(1+2)}{n^2}$ جہاں حاصل جمع کی ایک سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے لیا گیا ہے اور س کی قیمت ایک سے ن تک کوئی بھی ہے۔

۱۴ - ن ضلعوں والا ایک منظم کثیرالاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا

ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیرالاضلاع کے راسوں تک وتر کھینچے گئے ہیں۔ اگر وتر ۱، ۲، ۳، ...، n سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اُس وتر سے کی گئی ہے جو غریب ترین راس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دو سرے غریب وار لئے گئے ہیں) تو ثابت کرو کہ مقدار

نصف قطر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جاسکتے ہیں ان کی تعداد م، صحیح عددوں کی اس تعداد کا نصف ہے جو ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دکھاؤ کہ n کے فیصلوں کا حاصل ضرب n مان $n-2$ م

کے مساوی ہے اگر n ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور n کے مساوی ہے اگر n ایک مفرد عدد کی قوت نہ ہو۔

(246)

پچودھواں باب

لائتناہی سلسلوں کا نظریہ

۱۹۱۔۔۔۔۔ ہم اس باب میں چند مسئلے بیان کریں گے جو لائتناہی سلسلوں کے استدقاق سے متعلق ہیں جبکہ ان کی ارقام حقیقی یا ملتف اعداد ہوں یا متغیرات۔ ایسے سلسلوں کے نظریہ کی مکمل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے، اس لیے ہم اپنی توجہ صرف ان چیزوں تک محدود رکھیں گے جو مثالی سلسلوں کی نوعیت اور ان کی خاصیتوں پر بحث کرنے کے لیے بالکل ضروری ہیں۔

حقیقی سلسلوں کا استدقاق

۱۹۲۔۔۔۔۔ فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا کوئی توازن $ل + ل + ل + \dots$ ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے اور فرض کرو

$$س = ل + ل + ل + \dots + ل$$

اگر $س$ کی ایک معین محدود انتہا $س$ ہے جبکہ $ن$ کو نامحدود طور پر بڑھایا جاتا ہے تو لائتناہی سلسلے $ل + ل + ل + \dots + ل + ل + \dots$ کو مستحق کہا جاتا ہے اور $س$ کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف اس کا مجموعہ کہتے ہیں۔

ہم اس باب میں مس کی انتہا کو (جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے)
ظاہر کرنے کے لیے ترقیم نہاسی استعمال کریں گے جب شبھی
یہ انتہا موجود ہو۔

وہ شرط کہ نہاں $\text{س} = \text{س}$ یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد صہ کے متناظر، خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو، ن کی ایک قیمت ن متعین ہو سکے ایسی کہ $\text{س} - \text{س}$ کی مطلق قیمت، صہ سے کم ہوتوں کی ہر قیمت کے لیے جو ن سے بڑی یا اس کے مساوی ہو۔

جب سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$ سے کسی طرف مستحق بنو تو سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$ مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ ہے۔ اس سے جس کو بن سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ عدد بن کو مستحق سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$ کا n رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں۔ باقی بن، $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$ عددوں کا ایک تواتر بناتے ہیں ایسا کہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$ یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلے کا استحقاق ان لینے کے بعد ہی باقی بن کا کوئی مفہوم ہو سکتا ہے۔

عدد $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ کو $\frac{1}{m}$ سے

تعبیر کیا جاسکتا ہے اور عددوں $1, 2, 3, \dots$ کو ہم n رقموں کے بعد والے جزوی باقی کہیں گے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ جزوی باقی $1, 2, 3, \dots$ اور n کی تمام قیمتوں کے لیے معین عددوں طور پر موجود ہوتے ہیں خواہ دیا جوا سلسلہ مستقر ہو یا نہ ہو۔ کسی مستقر سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ کا انتہائی مجموعہ اکثر ∞ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

(247)

سب کے سب مطلق قیمت میں $\frac{1}{n}$ عا سے کم ہیں۔ اس سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ $\frac{1}{n} =$ اس جبکہ عا کی اختیاری قیمتیں حساب میں لی گئی ہوں۔

اب $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = (س - س) - (س - س)$ اور پھر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $س - س$ ، $س - س$ دونوں عدد $\frac{1}{n}$ عا سے کم ہیں اس لیے $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ عدد $\frac{1}{n}$ عا سے کم ہے، اور یہ $م$ کی سب قیمتوں $۱، ۲، ۳، \dots$ کے لیے درست ہے۔

بھریہ دیکھانے کے لیے کہ اوپر کی شرط کافی ہے ہم ایک اصول کی طرف رجوع کرتے ہیں جو استدقاق کے عام اصول کے طور پر مشہور ہے۔ اس اصول کے مطابق عددوں کے ایک تواتر $س، س، س، \dots، س$ کی ایک معین انتہا ہوگی بشرطیکہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں $ن$ کی ایک قیمت $س$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد

$س - س، س - س، س - س، \dots، س - س$ سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں۔ پس شرط کے کافی ہونے کے لیے ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ آیا $س - س$ ، جزوی باقی $س - س، س - س، س - س، \dots، س - س$ کے مساوی ہے۔

اگر $م = ۱$ لیا جائے تو شرط میں یہ بات شامل ہے کہ $ن$ کی

تعبیر کی گئی ہے، اس طرح | ۱ | ۱ کے مساوی ہے یا۔ ۱ کے بموجب
اس کے کہ ۱ مثبت ہے یا منفی۔ اب سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$$

پر غور کرو۔

اگر یہ آخری سلسلہ مستحق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً مستحق

کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ | ۱ | ۱ متبع ہے تو سلسلہ | ۱ | ۱ کو
(250) نیم مستحق یا مشروطاً مستحق یا اتفاقاً مستحق کہتے ہیں۔

سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ مطلقاً مستحق ہے کیونکہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$

مستحق ہے؛ لیکن سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ صرف مشروطاً مستحق ہے

کیونکہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ متبع ہے۔

سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ جس میں ارقام باری باری سے

مثبت منفی ہیں ہمیشہ مستحق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقم ما بعد
بڑی ہو اور نیز ہنسائے۔ کیونکہ

$$(1) \text{ ب } ۱ = (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) + (1 + 1 + 1 + \dots)$$

$$= 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

اور اس لیے (۱) ب ۱، مثبت ہے اور ۱ سے کم ہے یا اس کے

مساوی۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہو سکتا ہے اتنا بڑا کہ | ب ۱ | حصہ م

کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ حصہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ اس لیے سلسلہ مستحق ہے۔

۱۹۵ — مشروطاً مستحق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بدل لاجائے

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقوموں کا مجموعہ
 سی ہے اور پہلی ق منفی رقوموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی
 ہیں سی ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اس طور پر
 کہ مثبت رقوموں کا توازن بدلے اور نیز منفی رقوموں کا توازن بدلے
 اور سلسلہ کی پہلی ق + ق رقوموں میں سے ف رقیمیں مثبت ہوں اور
 ق رقیمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ سی ہے۔ سی
 کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب
 چونکہ توازن سی، سی میں سے ہر ایک مثبت رقوموں پر مشتمل ہے
 اس لیے سی کی اور سی کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا
 ورنہ لا متناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ
 دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستحق نہیں ہے، اس لیے سی، سی کی
 انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لا متناہی ہے؛ اگر دونوں انتہائیں
 لا متناہی ہیں تو نہا (سی - سی) کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں
 کے دو توازنوں پر منحصر ہوگی۔ اگر سی، سی کی انتہاؤں میں
 سے صرف ایک لا متناہی ہے تو نہا (سی - سی) لا متناہی ہے
 اور اس لیے اصلی سلسلہ مستحق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی
 ترتیب ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ ... میں علامتیں باری باری سے
 مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبت تساوی میں غیر معین طور پر
 بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب ۱ + ۱ - ۱
 - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ ... میں لکھیں تو ف اور ق نسبت
 ۱:۲ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور سی - سی

اور s_1 - s_2 کی انتہا میں جبکہ Q کو غیر متعین طور پر بڑھا دیا جائے گا، انہیں مساوی کر دیتا ہے۔ مثلاً نیم مستقیم سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ پر غور کرو۔ اس کے مجموعہ کو s سے تعبیر کیا جائے تو

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

(251)

فرض کرو کہ سلسلہ s میں رقموں کی ترتیب کو بدلا گیا ہے اور اس طرح سلسلہ

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس کے مجموعہ کو s' سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$s' - s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} = s - s'$$

اس لیے جب n لا انتہا بڑھتا ہو تو $s = \frac{3}{2} s'$ ۔ یہ مثال ڈیرشلی (Dirichlet) نے دی تھی جس نے سب سے اول یہ بتایا کہ نیم مستقیم سلسلہ مجموعہ رقموں کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۹۶ — ریمن (Riemann) نے ثابت کیا ہے کہ نیم مستقیم سلسلہ کی رقموں کو ایسی ترتیب میں کمرہ مرتب کیا جاسکتا ہے کہ اس نئے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ کوئی دی ہوئی قیمت a اختیار کر سکے۔

فرض کرو کہ a مثبت ہے؛ اول f مثبت رقمیں جو جہاں f ایسا ہے کہ $s_1 < a$ اور $s_2 < a$ ؛ پھر Q منفی رقمیں جو

$| (س + خ س) - (س + خ س) | \geq | س - س | + | س - س |$
 اب اگر نہا س = س نہا س = س تو ہم ن کی ایک قیمت ن منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ
 $| س - س | > | س - س | + | س - س |$ بشرطیکہ $ن \leq س$ ۔ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ
 $| (س + خ س) - (س + خ س) | > | س - س | + | س - س |$ اور چونکہ صہ اختیاری ہے
 اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا س = س + خ س اور اس طرح
 ملف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں $س$ ، $س$ ، $س$ میں سے کسی کی
 انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ بہتر از کرے تو سلسلہ $س$ مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ $س = (س + خ س)$ ۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ
 سلسلہ $س$ مستدق ہوگا اگر سلسلہ $س$ جس میں ہر رقم $س$ تناظر رقم
 $س$ کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ $س$ (س + خ س)
 مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں $س$ ، $س$ ، $س$ میں سے ہر ایک
 مستدق ہو۔ اب اعداد $س$ ، $س$ ، $س$ میں سے ہر ایک عددوں $س$ ، $س$ ،
 کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں $س$ ، $س$ ، $س$ میں
 سے ہر ایک کے لیے عدد $س$ ۔ س سلسلہ $س$ کے تناظر
 جزوی باقی سے عدد اکم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ $س$ مستدق ہے تو
 سلسلوں $س$ ، $س$ ، $س$ میں سے ہر ایک مستدق ہے،
 اور اس لیے سلسلہ $س$ مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ
 $\text{ح} \text{ ن} (\text{جم} \text{ ط} + \text{خ} \text{ جب} \text{ ط})$
 مستدق ہو سکتا ہے اور معہذا سلسلہ $\text{ح} \text{ ن} \text{ تنوع}$ ۔
 اگر سلسلہ $\text{ح} \text{ ن}$ جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ
 $\text{ح} \text{ ن} (\text{جم} \text{ ط} + \text{خ} \text{ جب} \text{ ط})$
 کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں۔

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم $\text{ن}^1 (\text{جم} \text{ ن} \text{ ط} + \text{خ} \text{ جب} \text{ ن} \text{ ط})$ ہے مطلقاً
 مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $\text{ح} \text{ ن}^1$ مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی
 عام رقم $\text{ن}^1 (\text{جم} \text{ ن} \text{ ط} + \text{خ} \text{ جب} \text{ ن} \text{ ط})$ ہے (جہاں $\pi^2 < \text{ط} < \pi$) مطلقاً مستدق
 نہیں ہے کیونکہ سلسلہ $\text{ح} \text{ ن}^1$ تنوع ہے۔

مسلل تفاعل

(253)

۱۹۸ — فرض کرو کہ ملتف عددی $= \text{لا} + \text{خ} \text{ ما کا ایک تفاعل}$
 ف (ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لیے جو کسی
 دیے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے۔ تب اس تفاعل کی ایک واحد
 قیمت ہوگی اُس شکل کے ہر نقطہ کے لیے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع
 ہوتی ہے۔ یہ رقبہ، ی کو تعبیر کرنے والے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہو سکتا ہے
 یا اس مستوی کا پورا حصہ۔

کوئی تفاعل نقطہ ی = ی پر مسلسل کہلاتا ہے اگر ایک
 مثبت عدد عا ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف (ی)۔ ف (ی) کا

مقیاس کسی مقررہ ثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوئی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی۔ ی۔ کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اس شرط کو پورا کرے اس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

یکساں استدقاق

۱۹۹ — فرض کرو کہ ی یا لا + خ کا ایک تفاعل فن (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ فن (ی) + فن (ی) + فن (ی) + ... + فن (ی) + ... مستدق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو فا (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مجموعہ

فن (ی) + فن (ی) + ... + فن (ی)

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے سن (ی) کے مساوی ہے، تب

فن (ی) + فن (ی) + ... کے انتہائی مجموعہ کو ن رقموں کے

بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو بن (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

فا (ی) = سن (ی) + بن (ی)

اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہوں کی ایک قیمت 'ی' پر غیر منحصر معلوم کی جاسکتی ہے ایسی کہ 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں 'ب' کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں $m \leq n$ تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے 'ی' کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ میں موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد 'ن' قیمت میں صہ پر منحصر ہوگا

تینیں اگر 'ی' رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت 'ی' کے لا انتہا قریب آئے اور تمام باقیوں 'ب' (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے 'ن' کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ 'ی' کے قرب میں سلسلہ یکساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

(254)

نقطہ 'ی' کو جس کے لیے صہ منتخب ہو سکے ایسا کہ صورت مذکورہ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر یکساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر یکساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ 'ن' کی کوئی مستقل قیمت مقرر کی جاسکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے 'ب' کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اس لیے سلسلہ یکساں طور پر اس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا اگر 'ی' = 'ی' تو سلسلہ یا مستدق ہو سکتا ہے یا قسح۔

ہم اس امر کو یوں بیان کر سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ جیسے 'ی' کسی ثابت قیمت 'ی' کے نزدیک آتا ہے

ایک مثبت عدد صہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف (ی) + ف (ی) + ف (ی) + کی رقموں کی وہ تعداد (جن کا لینا ضروری ہے تاکہ ا ب م (ی) | > صہ جہاں م < ن) ی - ی کے مقیاس پر منحصر ہو

اس طور پر کہ ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق (ی - ی) | گھٹتا ہے اور لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (ی - ی) لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ ی کے قرب میں غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب مق | ی - ی | کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے تو سلسلہ لا انتہا مست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستدق عددی سلسلہ لا انتہا مست رفتار سے مستدق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب، ی = ی تو سلسلہ ف (ی) + ف (ی) + کا استدقاق، اگر سلسلہ مستدق ہے تو، لا انتہا مست نہیں ہے؛ صرف اُس صورت میں جبکہ ی متغیر ہو اسی طور پر کہ مق | ی - ی) | لا انتہا گھٹے سلسلہ

$$ف (ی) + ف (ی) +$$

لا انتہا مست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے کہ کوئی سلسلہ ایک نقطہ پر غیر یکساں طور پر مستدق ہے یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اُس نقطہ کے قریب غیر یکساں طور پر مستدق ہے۔ رقموں کی وہ تعداد جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی بچے (ی) کے مقیاس کافی طور پر چھوٹے عدد صہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ی قیمت ی کے نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق | ی - ی | مسلسل

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستدق ہے تو قیوں کی یہ تعداد ادا جاتا ہے۔ ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عددن خود ایسے نقطہ کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

اگر کسی رقبہ میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو

(255)

$$|f_1(y)| \leq |f_2(y)| \leq \dots \leq |f_n(y)| \leq \dots$$

جہاں f_1, f_2, \dots مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ $f_1 + f_2 + \dots$ مستدق ہے تو سلسلہ

$$f_1(y) + f_2(y) + \dots$$

رقبہ میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استمداق کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں بڑے کام آتی ہے؛ اس کو دیریشٹر اس کی جانچ کہتے ہیں۔ اس کو ثبات کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیار دی طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو تو n منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں $n \leq n$ ۔ نیز ی کی ہر قیمت کے لیے

$$|f_1(y)| + |f_2(y)| + \dots + |f_n(y)| + \dots$$

کا مقیاس $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے

صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی ہر قیمت کے لیے یہ درست ہے ہم دیکھتے

ہیں کہ ملف سلسلہ مستدق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے $|f_1(y)| + \dots$

بشرطیکہ $n \leq n$ - اس لیے سلسلہ رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

نوٹ :- بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستدق اُس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد n معلوم ہو سکے ایسا کہ y کی تمام قیمتوں کے لیے باقی b کا مقیاس v سے کم ہو۔ لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اس تعریف سے زیادہ سخت ہے؛ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستدق نہ ہوتے ہوں لیکن اُس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں۔

۲۰۰۔ اگر تغاعلات $f(y), f(y), \dots$ مسلسل ہوں y کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ۱ میں موقعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تغاعل $f(y)$ جو مستدق سلسلہ $f(y)$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تغاعل ہے y کی تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ ۱ میں موقعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ $f(y)$ پورے رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستدق ہو۔

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے $f(y) = s + b$ جہاں n مثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ y کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے b کا مقیاس v سے کم ہے۔ فرض کرو کہ y میں m کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس اضافہ کے متناظر $f(y), s$ ، اور b میں اضافے علی الترتیب $m, f(y), m, s$ ، m, b ہیں۔ تب چونکہ بموجب فرض b اور $b + m$ کا مقیاس دونوں v سے کم ہیں اس لیے m, b کا مقیاس v سے کم ہے۔

نیز چونکہ سی، ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے اس لیے اگر مف ی کا
مقیاس کافی چھوٹا ہو تو مف سی کا مقیاس صہ سے کم ہوگا؛ پس
اگر مق مف ی ایک خاص قیمت سے کم ہو تو مف سی + مف بی کا
یا مف فا (ی) کا مقیاس ۳ صہ سے کم ہے کیونکہ مف سی + مف بی
کا مقیاس مف سی اور مف بی کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑا
نہیں ہے۔ اب ۳ صہ کو ہم اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا چاہیں؛ اس لیے
مف ی کو کافی چھوٹا لینے سے مق مف فا (ی) کو اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا
ہے جتنا ہم چاہیں؛ اس کے وہی معنی ہیں کہ تفاعل فا (ی) مسلسل ہے۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس ثبوت کے لیے یکساں استدقاق کی وہ کم
سخت تعریف کافی ہے جو دفعہ ۱۹۹ کے نوٹ میں دی گئی ہے۔

۲۰۱ ——— اگر ی کی قیمت ی کے لیے اس کے قرب میں سلسلہ کا
استدقاق غیر یکساں ہو تو یہ ضروری نہیں ہے کہ سلسلہ کا مجموعہ مسلسل ہو؛
اس صورت میں دفعہ مابقی کا استدلال ناکام رہتا ہے۔ تفاعل ف (ی)
کی انتہائی قیمت جبکہ ی = ی (ی) ہے لیکن اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ
ی = ی کی طرف متدق ہوتا ہے۔ {ف (ی) - ف (ی)} کو صفر کی طرف متدق ہوتا ہے۔

ہم مجموعہ {ف (ی) - ف (ی)} کو فا (ن، ی - ی) سے
تعبیر کر سکتے ہیں جو ن اور ی - ی کا تفاعل ہے۔ اب جبکہ ی کو پہلے
ی کے مساوی بنایا جاتا ہے اور پھر ن کو لا متناہی بنایا جاتا ہے تو
فا (ن، ی - ی) کی انتہائی قیمت صفر ہے؛ لیکن اگر ن کو پہلے لا متناہی
بنایا جائے اور بعد میں ی - ی کو صفر تو فا (ن، ی - ی) کی انتہائی قیمت کا

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\dots + \frac{لا(۲+لا)ن + لا(۱-۳)ن + لا - ۱}{(۱+لا)ن \{۱+لا(۱-ن)\}} + \dots + \frac{لا + ۱}{(لا+۱)۲}$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر لا = ۰ تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\dots + \frac{۱}{(۱+ن)ن} + \dots + \frac{۱}{۲ \times ۱}$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{لا}{(۱+لا)ن} + \frac{۱}{(۱+ن)ن}$$

$$\left\{ \frac{۲}{۱+لا} + \frac{۱}{۱+ن} \right\} - \left\{ \frac{۲}{۱+لا(۱-ن)} + \frac{۱}{ن} \right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ لا کوئی قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔

سلسلہ $\frac{۱}{۲ \times ۱} + \frac{۱}{۳ \times ۲} + \dots$ کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے

سلسلہ کا مجموعہ لا کی قیمت صفر کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

ن رقموں کے بعد باقی $\frac{۱}{۱+ن} + \frac{۲}{۱+لا}ن$ ہے؛ اس کو صہ کے مساوی رکھنے

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$ن = \frac{\{ ۲ + لا - صہ(۱+لا) + [صہ(۱+لا) - \{ ۲ + لا - صہ(۳-۳) \}] \}}{صہ لا}$$

جو لا انتہا بڑھتا ہے جیسے لا، لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا گیا سلسلہ لا انتہا

تست رفتار سے متفق ہوتا ہے جبکہ لا، لا انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم

تسلل کی یہی وجہ ہے۔

سلسلوں کے کیساں اور غیر کیساں استنتاج کے درمیان امتیاز کا اگلا نشانہ بالعموم سیدیل (Siedel) (257)

سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اپنا مضمون "Note über eine Eigenschaft" بیورین اکاڈمی کے "Transactions" بابہ ۱۸۴۳ میں شائع کیا تھا، لیکن یہ نظریہ اس سے قبل اسٹوکس نے ایک مقالہ "On the Critical Values of the sums" میں شائع کیا تھا جس کو اُس نے کیمبرج فلاسیفکل سوسائٹی کے روبرو ۶ دسمبر ۱۸۴۳ کو پڑھا تھا۔ اگرچہ اس نظریہ کو سیڈیل نے اسٹوکس کی بہ نسبت بعض باتوں میں زیادہ مکمل طور پر بیان کیا ہے تاہم اسٹوکس کو اس امر میں سبقت حاصل ہے کہ اُس نے اُن تفاعلوں کے عدم تسلسل کی اصلی وجہ دریافت کی جو لامتناہی سلسلوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اس مضمون میں حال میں جو ترقی ہوئی ہے اُس میں یکساں اور غیر یکساں استہفاق کے درمیانی امتیاز کو بہت اہمیت حاصل ہے۔

سیڈیل نے اس امر کو حسب ذیل مسئلہ میں مختصر کر دیا ہے :- اگر ایک مستقر سلسلہ دیا جائے جس کی واحد ارقام متغیری کے مسلسل تفاعل ہیں اور جو ی کے ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ایک نقطہ کے عین قرب میں جہاں تفاعل غیر مسلسل ہے ی کی قیمتیں مقرر کی جاسکتی ہیں ایسی کہ ان کے لیے سلسلہ اتنی سست رفتار سے مستقر ہو جتنی ہم چاہیں۔

سلسلہ ہندسیہ

$$\begin{aligned}
 ۲۰۲ \text{ ————— سلسلہ ہندسیہ } & ۱ + ی + ی^۲ + \dots + ی^{n-۱} \text{ ————— برغور کرو جہاں} \\
 ی = لا + خا = ر (جم ط + خر جب ط) \text{ — اس سلسلہ کا مجموعہ ہے} \\
 \frac{۱ - ی^n}{۱ - ی} \text{ یا } \frac{۱ - ر^n (جم ن ط + خر جب ن ط)}{۱ - ر (جم ط + خر جب ط)} \\
 \text{رکھو} \quad ۱ - ر جم ط = غم فز \quad ر جب ط = غم جب ف
 \end{aligned}$$

رکھنے کی ضرورت ہے۔

سلسلہ ہندسیہ کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستحق ہے اگر کی کا مقیاس $\gg 1$ - ضہ سے جہاں ضہ کوئی مستقل مثبت عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی n رقموں کے بعد باقی $\frac{1}{10^n}$ ہے اور اس کا مقیاس $(1 - ضہ)$ سے کم ہے؛ تب سلسلہ ایسا ہو گا کہ کی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس $\gg 1$ - ضہ سے

|ب (ی) | \gg ضہ

اگر $\frac{(1 - ضہ)^n}{ضہ} < \text{لوک ضہ} + \text{لوک ضہ}$
(لوک (1 - ضہ))

پس چونکہ n کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کی کی تمام قیمتوں کے لیے (جن کے مقیاس $\gg 1$ - ضہ سے) n رقموں کے بعد والے باقی ضہ سے کم ہوں اور چونکہ n کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ میں یکساں طور پر مستحق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبداء پر) دائرہ کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳۔۔۔۔۔ اب ہم اس عام قوتی سلسلہ

$1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots$

(استثنا کے) $۱ +$ صہ اور $۱ -$ صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ زیادہ عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک مثبت عدد ۱ موجود ہو ایسا کہ n کی تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے) $۱ +$ صہ سے کم ہو اور نیز ایسا ہو کہ n کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے $۱ +$ صہ اور $۱ -$ صہ کے درمیان واقع ہو۔ ہر صورت میں عدد غہ $= \frac{1}{2}$ ۔ اس کو دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہو گا کہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے اگر $\frac{1}{2} >$ اور متبع ہوتا ہے اگر $\frac{1}{2} <$ ۔ کیونکہ n کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ایک محدود جٹ کے $۱ +$ صہ $\frac{1}{2}$ جہاں صہ اختیار ہی ہے؛ اگر $\frac{1}{2} >$ تو ہم صہ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ $(۱ +$ صہ) $\frac{1}{2} > ۱ -$ تب سلسلہ کی تمام رقمیں (سوائے ان کے ایک محدود جٹ کے) اس سلسلہ بند سید کی متناظر رقموں سے کم ہوں گی جس کی نسبت مشترک $(۱ +$ صہ) $\frac{1}{2}$ ایک سے کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستحق ہے۔ اگر $\frac{1}{2} <$ تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $(۱ -$ صہ) $\frac{1}{2} < ۱ +$ اور اس طرح n کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے $۱ -$ صہ $\frac{1}{2} < ۱ +$ صہ $\frac{1}{2}$ ؛ اس لیے سلسلہ متبع ہے۔

اگر $\frac{1}{2}$ کی انتہا صفر کی طرف مستحق ہو جبکہ n کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو n کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔ کیونکہ اس صورت میں $۱ -$ صہ $\frac{1}{2} <$ جہاں صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ $\frac{1}{2} < ۱ +$ اور یہ n کی ہر قیمت کے لیے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے) درست ہے۔ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے ان کی ایک محدود تعداد کے ایک مستحق سلسلہ بند سید کی متناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستحق

ہے۔ اس صورت میں غ = ص -

اگر $\frac{1}{n}$ غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں میں $\frac{1}{n}$ سے بڑا ہو تو سلسلہ کی تمام قیمتوں کے لیے $\frac{1}{n} = 0$ متسع ہوتا ہے۔ اس صورت میں غ = 0۔ کیونکہ اگر ر کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی ان رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

۲۰۴۔ دفعہ ماضی میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد غ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ص اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ $عب + عم + عم + ...$ مستحق ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے چھوٹی ہو، اور متسع ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے بڑی ہو۔ نقطہ ی = کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غ کا ایک دائرہ

کھینچو۔ اس دائرہ کو سلسلہ $ا + ا + ا + ...$ کے استدقاق کا دائرہ کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر محدود ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ $ا + ا + ا + ...$ کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستحق ہوتا ہے، اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو متسع ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جاسکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستحق ہے اگر مرقی \leq غہ اس واقعہ سے
 منفع ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاموں کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے ۔ اور یہ
 امر کہ سلسلہ منفع ہے اگر مرقی کی قیمت \leq غہ اس واقعہ سے منفع ہوتا ہے

کہ استمداق کی ضروری شرط ہنسا | وچ ٹی = پوری نہیں ہوتی - کیونکہ

۱۷۱ = (۲۰۰) عن غنہ ، اور ان کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے

عن غہ < (۱- غہ ص)؛ اس لئے اگر وہ منتخب کیا جائے ایسا کہ

$$1 < \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ | چ | ی | ا | ن کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لئے۔

۲۰۵ — اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکزی = ۰ ہو یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غم = ک ہے اور فرض کرو کہ غم ایک ثابت عدد ہے غم = غم = ک کے درمیان۔ فرض کرو غم = ک = غم = ۵۵۔

باقی $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega^2} + \dots$ کے انتہائی مجموعہ کا متغیر سلسلہ

$$\dots + \frac{1+\psi}{1+\psi} x + \frac{\psi}{\psi} x$$

$$\dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+u} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+u} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{u} + \left(\frac{1}{2}\right)^{u}$$

کے انتہائی مجموعہ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ لیکن اعداد صمغ غم^۱، صمغ^۲، غم^۳ + ۱، صمغ^۴ + ۱،
 سب کے سب کسی ثابت عدد ک سے کم ہیں کیونکہ سلسلہ مستدق ہے جبکہ
 ر = غم^۱؛ اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ک { (۱/۲)^۱ + (۱/۲)^۲ + ... } سے بڑا
 ک (۱/۲)^۱ (۱ - ۱/۲) سے کم ہے، اور یہ ک (۱ - ۱/۲)^۱ غم^۳ سے
 کم ہے۔ اگر صہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ایک مثبت عدد ہوتوں کی ایک
 قیمت n متعین ہو سکتی ہے ایسی کہ n ≤ n کے لیے ک (۱ - ۱/۲)^۱ غم^۳ > صہ۔
 اس لیے سلسلہ ۱ + ۱/۲ + ۱/۲ + ... کے باقی ب (۱) کا مقیاس صہ سے کم ہے
 n ≤ n کے لیے اور ی کی تمام قیمتوں کے لیے ایسی کہ مق ی > صہ۔ ک؛
 اس لیے سلسلہ کا استد قاق نصف قطر صہ۔ ک کے دائرہ میں یکساں ہے۔
 یہ درست ہے خواہ کتنا ہی چھوٹا عدد ک (< ۰) لیا جائے، لیکن یہ دعویٰ کرنا
 غیر صحیح ہوگا کہ استد قاق کے دائرہ میں استد قاق بالضرور یکساں ہوتا ہے۔
 سلسلہ ۱ + ۱/۲ + ۱/۲ + ... کے مجموعہ کو ی کی ان قیمتوں کے لیے
 جن کے مقیاس استد قاق کے نصف قطر سے کم ہیں فا (۱) سے تعبیر کریں
 تو دفعہ ۲۰۰ کی رو سے نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (۱) استد قاق کے دائرہ کے
 اندر موقوفہ تمام نقطوں کے لیے ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر استد قاق کا
 نصف قطر لاتناہی ہو تو مستوی کے تمام محدود نقطوں کے لیے فا (۱)
 مسلسل ہوتا ہے۔

جبکہ ی = - ۱ سلسلہ کا مستحق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ اشتقاق کے دائرہ پر صرف نیم مستحق ہو۔ اگر سلسلہ کے سر ملطف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں توڑ سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی۔ پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جاسکتا ہے۔

(263)

$$\text{سلسلہ } ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots$$

مستحق ہے جبکہ ی = ۱ سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱ پس یہ دو

$$\frac{۱}{۲} \text{ جم ن ط، } \frac{۱}{۳} \text{ جب ن ط دونوں مستحق ہیں سوائے اس کے کہ}$$

پہلا سلسلہ متع ہو تا ہے جبکہ ط صفر ہو یا ۳ کا جفت ضعف۔

$$۲۰۴ \text{ — فرض کرو کہ فا (لا)، لا کا وہ مسلسل تفاعل ہے جو}$$

سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ... کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس کے سر حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے لئے مستحق ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متع ہو تا ہے جبکہ لا < ۱ لیکن یہ کہ سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ... جو لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے مستحق۔

اب ہم یہ بتائیں گے کہ سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ... کا مجموعہ فا (لا) کی انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک پہنچتا ہے۔ پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا = ۱ کے لیے فا (۱) =

$$\text{نتیجہ فا (لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ... کے مجموعہ کو}$$

اور (س-صہ) لا + (۱-لا) (س+س+لا+...+س^{۱-۳})
 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔
 اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

فا (لا) - س | > صہ + | س | (۱-لا) + (۱-لا) (س+س+...+س^{۱-۳})
 صہ کے جواب میں عددن مقرر ہو جانے کے بعد ہم لا کی ایک قیمت
 (فرض کرو لا) منتخب کر سکتے ہیں ایسی کہ فا (لا) - س | عدد ۲ صہ سے چھوٹا
 ہو کیونکہ لا لا اور لا اور لا اور لا اتنے چھوٹے لیے جا سکتے
 ہیں جتنے ہم چاہیں اگر لا کا مناسب انتخاب کیا جائے۔ اب چونکہ
 ۲ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (لا) کی انتہا لا = ۱
 کے لئے س ہے۔

(284)

اگر لا، لا، لا، ... ملٹف عدد ہوں تو ہم سلسلہ کو دو حصوں میں
 تقسیم کر سکتے ہیں ایک حقیقی اور دوسرا خیالی۔ تب مسئلہ کا اطلاق ہر حصہ پر
 الگ الگ ہوتا ہے اور اس لیے وہ پورے سلسلہ کے لیے درست ہے۔
 نائیاً فرض کرو کہ فا (لا) وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ لا + لا + لا + ...
 + ... کے مجموعہ کو جبکہ متی > تعبیر کرتا ہے جہاں ملٹف عدد ر (جم طہ
 + خ جب طہ) ہے۔ یہ سلسلہ ان دو حصوں

لا + لا + لا + ... جم طہ + لا + لا + ... جم طہ + ...

خ (لا + لا + لا + ... جب طہ + لا + لا + ... جب طہ + ...)

میں تقسیم ہو سکتا ہے اور مسئلہ بالا ان دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔
اس لیے اگر سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ مستحق ہو جبکہ $۱ = \text{جم} ط + \text{خر جب ط}$
تو اس کا مجموعہ، $۱ = ا کے لیے فا (ی)$ کی انتہا ہے جبکہ ط کی قیمت کو
مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے
استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے بلحاظ ان نقاط
کے جو اس نقطہ میں سے گزریں والے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر
پر ہیں۔

اس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سلسلہ
 $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$

کی رقموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔
مثلاً ان دو حقیقی سلسلوں

$$۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots \text{ اور } ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

پر غور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستحق
ہوتے ہیں اور ان کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب $۱ = لا$ تو ان
سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جا چکا
ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ لا کی قیمت $۱ =$ ایک مسلسل ہے لیکن دوسرے
سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۲۰۸ — ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں، نصف قطرک (\angle) کے دائرہ میں موقوفہ تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فا (ی) کی طرف مستدق ہوں۔ چونکہ وہ ی = کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے $\angle = ب$ اور اس طرح یہ سلسلے $\angle ی + \angle ی + \dots + ب ی + ب ی + \dots$ ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ مق ی $\geq ک$ ۔ یہ ناممکن ہے تا وقتیکہ یہ دو سلسلے

$$\angle ی + \angle ی + \dots + ب ی + ب ی + \dots + ی + \dots$$

دونوں مستدق نہ ہوں اور مق ی $\geq ک$ کے لیے ان کے انتہائی

مجموعے ایک ہی نہ ہوں۔ ان دو سلسلوں کے استدقاق کے

نصف قطروں میں سے ہر ایک $\leq ک$ اور ان کے مجموعہ تفاعل

(Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے

اندر مسلسل ہیں۔ چونکہ ان کے مجموعہ تفاعل نصف قطرک کے (285)

دائرہ کے اندر ہی کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = کے مماثل ہیں

اس لیے ان تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں

جبکہ ی = اور اس لیے $\angle = ب$ ۔ اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ان دو سلسلوں کے متناظر سر سب کے سب

مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں۔

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ — فرض کرو کہ دو مطلقاً مستدق سلسلوں

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کے انتہائی مجموعے S_1 ، S_2 سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ سلسلہ

$$۱ + (۱ + ۱ + ۱ + \dots) + (۱ + ۱ + ۱ + \dots) + \dots$$

جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $S_1 S_2$ ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی n رقموں کے مجموعہ کو S_n سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ a اور b کے مقیاس علی الترتیب a اور b ہیں۔ اب چونکہ سلسلے S_1 ، S_2 مطلقاً مستحق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستحق ہیں؛ ان کے مجموعوں کو a ، b سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$S_1 = ۱ + (۱ + ۱ + ۱ + \dots) + (۱ + ۱ + ۱ + \dots) + \dots$$

$$S_2 = ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$S_n = (S_1 S_2) \geq ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$\geq ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

اب $S_n > ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ کیونکہ S_n میں حاصل ضرب $۱ + ۱ + ۱ + \dots$

کی نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور S_n میں a کی نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس S_n کی انتہا جبکہ n کو لا انتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ S_n ، S_1 کی

انتہائیں ایک ہی ہونی چاہئیں اس لیے ان میں سے ہر ایک ہر مہر کے مساوی ہے؛ اس طرح مق (س) س (س) کی انتہا منفی یاس = س س س۔ زیادہ عام طور پر یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اس سلسلہ کی صحت کے لیے یہ کافی ہے کہ سلسلوں $1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots + 1$ میں سے صرف ایک مطلقاً مستحق ہو اور دوسرا مشروطاً مستحق۔ اگر یہ دو سلسلے صرف مشروطاً مستحق ہوں تو حاصل ضربی سلسلہ $1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots + 1$ کا مستحق ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس کے مستحق ہونے کی صورت میں یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اس کا مجموعہ ویسے ہوئے دو سلسلوں کے مجموعوں کا حاصل ضرب ہے۔

دو ہرے سلسلوں کا استنتاج

(266)

۲۱۰۔ فرض کرو کہ مثبت حقیقی عددوں a, b کے ایک دو ہرے تو اتر

$$\begin{aligned} & a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \\ & b^1, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \\ & \dots \\ & a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \\ & b^1, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \end{aligned}$$

پر ہم غور کرتے ہیں۔

۱۔ ان نتیجوں کے ثبوت کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب *Theory of functions of a real variable* صفحات ۵۰۰، ۵۰۱۔

مان لو کہ جب ہر صف کے عددوں کو باہم جمع کیا جاتا ہے تو ان کے مجموعہ کی ایک معین انتہا ہے؛ فرض کرو کہ پہلی، دوسری، ... روئیں، ... صفوں کے لیے اس انتہائی مجموعہ کی قیمتیں س، س، ... س، ... ہیں۔ نیز یہ مان لو کہ سلسلہ س + س + ... + س + ... مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔ یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ

$$م، م + م، م + ... + م، م + ...$$

جو کسی ایک ستون کے عددوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستحق ہے اور اگر اس کا انتہائی مجموعہ م سے تعبیر ہو تو سلسلہ

$$م + م + م + ... + م + ...$$

مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ م ہے۔

$$یا بات کہ م، م + م، م + ... + م، م + ...$$

مستحق ہے اس واقعہ سے نتیجہ ہوتا ہے کہ اس سلسلہ کی ہر رقم مستحق سلسلہ س + س + س + ... + س + ... کی متناظر رقم سے چھوٹی ہے۔ ایک مثبت عدد منتخب کیا

ایسا کہ ر اعداد

$$م - \frac{م}{۱}، م - \frac{م}{۲}، ...، م - \frac{م}{ن}، م - \frac{م}{ن+۱}$$

سب کے سب صفر سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے

$$م + م + ... + م + م + ... + م + م + ... + م + م + ...$$

اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے سلسلہ م + م + ... + م + م + ...

س۔ $\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$ س۔ $\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$ س۔ $\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$

سب کے سب صے سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے سلسلہ $m + m + \dots$ کا انتہائی مجموعہ $m + m + \dots$ سے بڑا ہے؟ اور چونکہ یہ رکی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ $\leq m$ ۔ اب چونکہ ص اختیار ی چھوٹا عدد ہے سلسلہ $m + m + \dots$ کا انتہائی مجموعہ $\leq m$ ، لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ $\geq m$ ۔ پس یہ انتہائی مجموعہ m کے مساوی ہے۔

اگر مثبت اعداد a, b, c ایسے ہوں کہ سلسلوں a, b, c + ...

میں سے ہر سلسلہ ایک عدد س کی طرف مستحق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ
 س + س + س + ... مستحق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد عمر اس مثبت عدد

(267) کے ایک مستحق دوبرے سلسلہ کی رقیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ اس ہے۔ اس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اس دوبرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہوگا خواہ عمل جمع پہلے اس کے لحاظ سے اور پھر اس کے لحاظ سے ہو یا اس ترتیب کے بالعکس۔ اس طرح

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{عمر } i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \text{عمر } j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{عمر } i$$

اگر عددوں میں سے ہر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر احداً

اگر s | ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد s | ایک مطلقاً مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہیں۔
اگر وہ دوہرے سلسلہ جس کی رقیں s | ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

کیونکہ فرض کرو s | = s |۔ جہاں s | = جبکہ s | ثابت ہوتا ہے اور s | = جبکہ s | منفی ہوتا ہے۔ پس دیے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقیں مثبت اعداد s | اور s | ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام رتسم s | + s | = s | ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقیں s | اور s | ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لئے جاسکتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام رتسم s | ہے کسی ایک ترتیب میں حال جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جاسکتا ہے۔

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد s | ملتف ہوں اگر مقیاسوں s | کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر s | = s | + s | تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں جس، جس ہیں دونوں مطلقاً مستدق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ برآورد ہوتا ہے۔

اس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے:-

اگر $1 + 1 + 1 + \dots$ حقیقی یا ملطف عددوں کا ایک مستدق سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم 1 کو ایک مطلقاً مستدق سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر، سلسلہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

دکھا جاسکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ (268)

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

مستدق ہو جہاں 1 سے

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کریں گے حسب ذیل ہے:-

اگر $1 + 1 + 1 + \dots$ ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ (A)

ہے اور اگر $ا، ا، ا، ...$ حسب ذیل مطلقاً مستحق سلسلوں

ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...

ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...

ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...

کے انتہائی مجموعے ہوں تب اگر سلسلہ $ا + ا(د) + ا(د) + ...$ مستحق ہو
جہاں اسے سلسلہ $ا، ا + ا، ا + ا، ا + ...$ کا مجموعہ تعبیر ہوتا
تو سلسلہ

$(ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...) + (ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...) +$

$(ببب + ببب_۱ + ببب_۲ + ببب_۳ + ...) + ...$

جو دیے ہوئے سلسلہ میں $ا، ا، ا، ...$ کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا
اور جس کی رقموں کو ماکہ قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے مستحق ہے اور
اس کا انتہائی مجموعہ $فا(ما، ی)$ ہے جو وہی ہے جو دیے ہوئے سلسلہ کا ہے۔

مسئلہ ثنائی

۲۱۱ ————— سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م(۱-م)}{۱} ی + \frac{م(۱-م)(۱-م)}{۱۲} ی + ...$$

جس میں $ی$ کی قوتیں صحیح اعداد ہیں اور جس کو $ی$ کی صعودی قوتوں میں

ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔
 اُس خاص صورت میں جبکہ m مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود
 ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ $(1 + y)^m$ ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو
 بالعموم دیا جاتا ہے y کی ملطف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔

ہم فرض کریں گے کہ y ایک ملطف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف
 اُس صورت تک محدود رکھیں گے جس میں m حقیقی ہو۔ اس صورت
 میں $\frac{y^m}{1+y^m} = \frac{1+y}{1-y}$ جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے
 اس سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر
 کے اس دائرہ کے اندر کسی نقطہ y پر یہ سلسلہ مطلقاً مستحق ہے اور
 اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستحق ہے۔
 سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو $f(m)$ سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا
 مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوفہ نقطوں
 کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(m) \times f(m) = f(m + m)$$

$$\text{اور اس لیے } f(m) \times f(m) \times f(m) \times \dots = f(m + m + m + \dots)$$

اول فرض کرو کہ m مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر $\frac{p}{q}$ ہے۔

$$\text{رکھو } m = \frac{p}{q} = \dots = m = \frac{p}{q} \text{ تو}$$

$$[f(\frac{p}{q})] = f(p) = f(p)$$

اس لیے ف (ف) = (ف) ف (پ) کا ق واں جذر ہے یعنی (۱+ی) ۴ کا۔

فرض کرو کہ

$$۱ + رجم ط = م جم ف، رجب ط = م جب ف$$

تب (۱+ی) ۴ = م (جم پ ف + رجب پ ف)
اور اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$ر قی \left\{ \frac{م جم ف + ۲ س ۲}{ق} + \frac{م رجب ف + ۲ س ۲}{ق} \right\}$$

جہاں س کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں۔ نیز

$$م = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

اور ہم ف کو مساں رجب ط کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ

ہے (مثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ جم ف
استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوفہ تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ قی ۴ {جم پ ف + ۲ س ۲ / ق + رجب پ ف + ۲ س ۲ / ق}

کی ایک قیمت ف (ف) ہے اور س کی ہمیشہ وہی قیمت ہوتی چاہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ

استدقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف (ف) ایک مسلسل

تفاعل ہے۔

س کی یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو ف = م تب ف (ف) حقیقی ہے

اور اس لیے

$$\{ \text{جہم } \frac{\pi \text{ س}^2}{\text{ق}} + \text{خ جب } \frac{\pi \text{ س}^2}{\text{ق}} \}$$

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے $\text{س} = 0$ یا $\text{س} = \frac{1}{\pi} \text{ ق}$ اگر ق جفت ہے۔ اگر ر کافی طور پر چھوٹا ہے تو $(\frac{1}{\pi} \text{ ق})$ یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے س ، $\frac{1}{\pi} \text{ ق}$ کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ م ایک مثبت عدد $\frac{1}{\pi} \text{ ق}$ ہو $(\text{م} + 1)$ کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(\text{م} + 1) \text{ ر جہم ط} + \frac{1}{\pi} \text{ ق} (\text{جہم } \frac{\pi \text{ س}^2}{\text{ق}} + \text{خ جب } \frac{\pi \text{ س}^2}{\text{ق}})$$

جس میں جملہ $(\text{م} + 1) \text{ ر جہم ط} + \frac{1}{\pi} \text{ ق}$ اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور نہ (270)

مس۔ $\frac{1}{\pi} \text{ ر جب ط}$ کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں $\text{ی} = \text{ر} (\text{جہم ط} + \text{خ جب ط})$ ۔

نایاناً فرض کر دو کہ م ایک مثبت غیر منطوق عدد ہے؛ ہم اس کو مثبت منطوق عددوں م ، م ، م ، ... کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\text{ف} (\text{م})$ ، تواتر $\text{ف} (\text{م})$ ، $\text{ف} (\text{م})$ ، ... $\text{ف} (\text{م})$ کی انتہا ہے، یا $\text{ف} (\text{م}) = \text{نہا ف} (\text{م})$ ۔ استدلال

کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ کی لیے حاصل ہوتا ہے

$$f(m) = 1 + m_r + \frac{m_r(m_r-1)}{2} + \dots + \frac{m_r(m_r-1)\dots(m_r-n+1)}{n!} + \dots$$

جہاں ابن ابی اُمیہ مستحق سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{n} \left| \frac{(n+n) \dots (1+n) n}{1+n} \right| + \frac{1}{n} \left| \frac{(1-n+n) \dots (1+n) n}{n} \right|$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں n ایک مثبت صحیح عدد ہے جو m ، m' ، ...؛
 m ، میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ n کی کافی طور پر بڑی تمام
 قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $|b_n(y)| > c$ تمام اعداد
 m کے لیے جہاں c اختیاری مثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ
 محدود سلسلہ

$$1 - \omega \frac{(1 + \omega - r) \dots (1 - r)}{1 - \omega} + \dots + \frac{(1 - r)}{r} + \omega + 1$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ م، م کی طرف مستحق ہو یہ ہے

$$1 - \frac{1}{m} \frac{(1-m)^m}{1-m} + \dots + \frac{1}{m} \frac{(1-m)^m}{m} + \dots + 1$$

اور اس لئے یہ ف (م)۔ ب (ی) کی انتہا ہے۔ غیر منطبق قوت کی تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب (۱ + ی) (م) کی خاص قیمت کی انتہا (۱ + ی) (م) ہے۔ چونکہ | ب (ی) |

> صفہ تمام اعداد م، م، م، ...، م کے لئے سٹے نہیں ہیں (ی) جسکی

ایک مُعین قیمت ہونی چاہیے \geq صد ہے۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$1 + م ی + م \frac{(1-م)}{2} ی + \dots + م \frac{(1-م) \dots (م-ن+2)}{(1-ن)} ی$$

(۱+۱) کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا
مقیاس n کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صد سے بڑا نہیں
ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ m کی مثبت غیر منطوق قیمت کے لیے
مستحق ہے اور $(1 + م ی)$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

(271)

آخر میں فرض کرو کہ m ایک منفی عدد $-m$ ہے۔ تب ہمیں حاصل
ہوتا ہے $f(m) = f(0) = 1$ ، اس لیے $f(m) = \frac{1}{f(-m)}$ ؛
یا $f(-m) = (1 + م ی)$ کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا $(1 + م ی)$ کی صدر
قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$\text{سلسلہ } 1 + م ی + م \frac{(1-م)}{2} ی + \dots + م \frac{(1-م) \dots (م-ن+2)}{(1-ن)} ی$$

کا مجموعہ y کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم
ہے $(1 + م ی)$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$\frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{2} (م + م^2 + م^3 + \dots + م^n)$$

جبکہ m کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالائیں y کا مقیاس 1 ہے اور

اس کی دلیل طہ ہے، اور فہم سا رجب طہ کی وہ قیمت ہے جو $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اس کی کتاب "Analyse Algébrique" میں لیا گیا۔

۲۱۲ — اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہ گیا ہے جب کہ مق $Y = 1$

$$\text{سلسلہ } 1 + m + \frac{m(1-m)}{2} + \frac{m(1-m)(2-m)}{3} + \dots$$

کی رقموں کو $1, 1, 1, \dots$ سے تعبیر کریں تو $\frac{1}{n} = (1-m)(1-n) \dots (1+n)$

اگر $n < m$ تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اس سلسلہ کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے مستحق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخر الامر لا انتہا چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ $n < m$ یعنی جبکہ $m < 1$ ، پس سلسلہ نیم مستحق ہوتا ہے اگر $m < 1$ ؛ لیکن اگر $m > 1$ تو وہ قسح ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقادیریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب $m < 1$ تو $1/n$ کی مطلق مقدار

غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے n غیر معین طور پر بڑھتا ہے ثابت عدد $m + 1$ کی بجائے s لکھو اور $1/n$ کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو k سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد رہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|1| = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$> \left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(1 + \frac{1}{r+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$> \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

سلسلہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots$ کی پہلی رقموں کا مجموعہ $< \frac{1}{r}$ اور ان کے بعد ۲ رقموں کا مجموعہ بھی $< \frac{1}{r}$ اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ $\frac{1}{r}$ کے کسی مقررہ ضعف سے بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لانا اتنا بڑھتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $|1|$ لانا اتنا گھٹتا ہے جیسے ن لانا اتنا بڑھتا ہے۔ جب $m = 1$ ۔ تو ثنائی سلسلہ کی رقمیں متبادلاً ۱ اور ۱ ہیں اور اس لئے سلسلہ مستحق نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + 1$$

مستحق ہوتا ہے جبکہ مق $y = 1$ بشرطیکہ $m < 1$ اور $y \neq 1$ ۔

جب $y = 1$ ۔ تو سلسلہ کی تمام رقمیں ایک خاص رقم کے بعد

ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$|1| < \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

لگانے سے سلسلہ مستحق ہو گا اگر

$$|1| < \{1 - (1 - m - n)\}$$

یا اگر $m < 0$.

دفعہ ۲۰۷ میں مذکورہ مسئلہ کی بموجب جب سلسلہ

$$1 + m + m^2 + \dots + \frac{m^{(1-m)}}{1-m} + \dots$$

استدقاق کے دائرہ پر مستحق ہوتا ہو تو اس کا مجموعہ جملہ

$$(1 + 2 + \dots + m) \frac{m^{(1-m)}}{1-m} + \dots$$

کی قیمت ہے اس نقطہ پر۔ ہم پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

$$\text{سلسلہ } 1 + m + m^2 + \dots + \frac{m^{(1-m)}}{1-m} + \dots + \frac{m^{(1-m+n)}}{1-m+n} + \dots$$

ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہوتا ہے جبکہ $m < 1$ بشرطیکہمثبت ہو؛ نیز مستحق ہوتا ہے اگر m صفر اور -1 کے درمیان ہوی کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے $m = -1$ کے اور اس صورت میں ی کیدلیل π ہے۔ یہ سلسلہ تسع ہوتا ہے جبکہ $m = -1$ اور جبکہ $m > 1$ ی کی تمام

قیمتوں کے لیے جن کے لیے سلسلہ مستحق ہوتا ہے اس کا

$$\text{مجموعہ } (1 + 2 + \dots + m) \frac{m^{(1-m)}}{1-m} + \dots + \frac{m^{(1-m+n)}}{1-m+n} + \dots$$

جہاں m کی قیمت $\pi \pm$ کے درمیان واقع ہے۔

ایبل (Abel) نے ایک مقالہ میں جو (Crelle's journal v d.i) میں

شائع ہوا تمام کی منف قیمتوں کے لیے مسئلہ ثنائی کی عام صورت پر بحث کی ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳۔ عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق (جہاں ϕ + خرب ϕ) کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیوٹر کے مسئلہ کی رو سے جہاں ϕ + خرب ϕ ہے اگر $\phi \pm \pi$ کے درمیان واقع ہو۔ (جہاں ϕ + خرب ϕ) کو شکل جہاں ϕ (۱ + خرب ϕ) میں لکھنے سے

$$\text{جہاں } \phi + \text{خرب } \phi = \text{جہاں } \phi \left[1 - \frac{m(1-m)}{2} \text{ مس } \phi + \dots \right]$$

$$+ \text{خرب } \phi \left[\text{مس } \phi - \frac{m(1-m)(2-m)}{3} \text{ مس } \phi + \dots \right]$$

بشرطیکہ سلسلہ مستحق ہو؛ یہ شرط پوری ہوگی اگر ϕ حدود $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو خواہ m کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہوگی اگر $\phi = \pm \frac{1}{2}\pi$ بشرطیکہ $m < 1$ ،

(۱) فرض کرو کہ m مثبت ہے، تب

$$\text{جہاں } \phi = \text{جہاں } \phi \left[1 - \frac{m(1-m)}{2} \text{ مس } \phi \right]$$

$$+ \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{4} \text{ مس } \phi - \dots$$

(۱).....

$$\text{جب } \phi = \text{جہاں } \phi \left[\text{مس } \phi - \frac{m(1-m)(2-m)}{3} \text{ مس } \phi + \dots \right]$$

(۲).....

m کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ $\phi \pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو، اور نیز یہ سلسلہ درست ہیں $\phi = \pm \frac{1}{2}\pi$ کے لیے بھی۔ دفعہ ۱۵ میں

(278)

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے تھے اور اس صورت میں استدقاق کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے ان ضابطوں کی توسیعات ہیں۔
(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو - م میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم ط} = ۱ - \frac{\text{م} (۱ + \text{م})}{۲} \text{ م ط} + \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م}) (۳ + \text{م})}{۲۴} \text{ م ط} + \dots (۳)$$

$$\text{جب م ط جم ط} = \text{م س ط} - \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م})}{۳} \text{ م س ط} + \dots (۴)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط $\pm \frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجے ط $\pm \frac{۱}{۳}$ کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م ۱۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴ — دفعہ اسبق کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م ذہ اور جب م ذہ کے جملوں کو جب ذہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کریں گے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔
ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م ذہ} = ۱ - \frac{\text{م}^۲}{۲} \text{ جب ذہ} + \frac{\text{م} (۲ - \text{م})}{۲} \text{ جب ذہ}$$

$$- \frac{\text{م} (۲ - \text{م}) (۲ - ۲\text{م})}{۲۴} \text{ جب ذہ} + \dots (۵)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب } م \neq ۰ = م \text{ جب } ۰ - \frac{م(۲-۱)}{۲} \text{ جب } ۰$$

$$+ \frac{م(۲-۱)(۲-۲)}{۲} \text{ جب } ۰ - \dots \dots (۶)$$

(274)

یہ جملے اس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ جم م ۰ اور جب م ۰ کے لیے جو جملے جم ۰ اور جب ۰ کی قوتوں میں تھے ان میں جم ۰ کی قوتوں کی بجائے ۱۔ جب ۰ کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر ان قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب ۰ کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا۔ یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ جم ۰ مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ ۰، $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔ اب ۱۔ جم ۰ کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ ثنائی برہنہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستحق ہونگے۔ چونکہ جب ۰ کی قوتوں کے تمام سلسلے مستحق ہوتے ہیں اور چونکہ جم م ۰، جب م ۰ کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب ۰ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ ۰، $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔ پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$$۱ + م (خ جب ۰) + \frac{م}{۲} (خ جب ۰) + \frac{م(۲-۱)}{۲} (خ جب ۰) + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ ف (م) سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو
خ سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔
جب، م مثبت صحیح عدد ہو تو ف (م) = جم م ذہ + خ جب م ذہ
اگر ذہ $\pm \frac{1}{p}$ کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ م، صحیح اعداد ہوں تو

$$ف (م) \times ف (م) = (جم م ذہ + خ جب م ذہ) (جم م ذہ + خ جب م ذہ)$$

$$= جم (م + م) ذہ + خ جب (م + م) ذہ$$

$$= ف (م + م)$$

ان دو سلسلوں ف (م)، ف (م) کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا
خواہ م، کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کر کے ہم
اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$ف (م) \times ف (م) = ف (م + م)$$

م اور م کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً متفق
ہیں۔ لہذا

$$ف (م) ف (م) ف (م) \dots ف (م) = ف (م + م + \dots + م)$$

اب فرض کرو کہ م = م = ... = م = $\frac{1}{p}$ جہاں پ اور ق مثبت صحیح عدد ہیں

$$\left\{ ف \left(\frac{1}{p} \right) \right\}^p = ف (پ)$$

پس $\left\{ ف (پ) \right\}^{\frac{1}{p}}$ کی ایک قیمت ف $\left(\frac{1}{p} \right)$ ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$جم \frac{1}{p} ذہ + خ جب \frac{1}{p} = ف (پ)$$

جہاں س کوئی صحیح عدد ہے۔ اب جبکہ $ف = ۰$ ، تو $ف = \left(\frac{۳}{۲}\right) = ۱$ ،
 اس لیے چونکہ مجموعہ $ف = \left(\frac{۳}{۲}\right)$ مسلسل بدلتا ہے جیسے $ف = ۱$ ، $\frac{۱}{۲}$ سے
 $۱ + \frac{۱}{۲}$ تک بڑھتا ہے ہمیں حاصل ہونا چاہئے $س = ۰$ ۔ اگر $ف$ ان حدود کے
 درمیان واقع ہے، پس اس صورت میں

$$\text{میں } ف = \left(\frac{۳}{۲}\right) = \text{جم } \frac{۳}{۲} + \text{خر جب } \frac{۳}{۲}$$

ثانیاً فرض کر دو کہ $م$ ایک مثبت غیر منطوق عدد ہے جو منطوق اعداد $م$ ، $م$ ، $م$ ، $م$ ،
 کے ایک تواتر کی انتہا ہے۔ تب

$$ف (م) = ۱ + م (خر جب ف) + \frac{م}{۲} (خر جب ف) + \dots +$$

$$م (م - ۱) + \dots + (م - ۳ - ۲) \frac{م}{۱ - ۲} (خر جب ف) - ۱$$

$$+ \frac{م (م - ۲) + \dots + (م - ۳ - ۲) (خر جب ف) + ب}{۱ - ۲}$$

جہاں $ب$ | $ا$ | $س$ مستدق سلسلہ

$$ن (ن + ۱) + \dots + (ن + ۲ - ۱) \frac{ن}{۱ + ۲} | جب ف = ۱ + ۲$$

$$+ \frac{ن (ن + ۲) + \dots + (ن + ۳ - ۲) (خر جب ف) + ۳ + ۲}{۲ + ۳} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک مثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م، ... سے بڑا ہے۔ ذ کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $|ب| > ص$ م کی تمام قیمتوں م، م، م، ... کے لیے جہاں ص کوئی اختیاری مثبت عدد ہے۔

ف (م) کی انتہا یعنی جم م ذ + خ جب م ذ کی انتہا جبکہ س کو لا انتہا بڑھا دیا جائے جم م ذ + خ جب م ذ ہے تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$1 + م (خ جب ذ) + \frac{م^2}{1} (خ جب ذ)^2 + \dots$$

$$+ \frac{م (م^2 - 1) \dots (م^2 - 1^2)}{1 - 1^2} (خ جب ذ)^{1-1}$$

$$+ \frac{م^2 (م^2 - 1) \dots (م^2 - 1^2)}{1^2} (خ جب ذ)^{1^2}$$

اور جم م ذ + خ جب م ذ میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا مقیاس ص سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ ص اختیاری ہے یہ ثابت ہو چکا کہ $\pm \frac{1}{n}$ کے درمیان ذ کی ہر قیمت کے لیے لامتناہی سلسلہ جم م ذ + خ جب م ذ کی طرف مستقر ہوتا ہے۔ آخر الامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد - م ہے۔ تب چونکہ ف (م) = ف (م) = ف (0) = 1، اس لیے

$$ف (م) = \frac{جم م ف + خ جب م ف}{جم م ف + خ جب م ف} = 1$$

پس اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ یہ دو سلسلے

$$جم م ف = 1 - \frac{م}{۱۲} جب ف + \frac{م (۲ - ۱)}{۱۲} جب ف - ... (۵)$$

$$جب م ف = م جب ف - \frac{م (۲ - ۱)}{۱۲} جب ف$$

$$+ \frac{م (۲ - ۱) (۲ - ۱)}{۱۲} جب ف - ... (۶)$$

درست ہیں نہ کی تمام قیمتوں کے لیے جو $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہوں خواہ
م کوئی حقیقی عدد ہو۔

یہ دو سلسلے مطلقاً مستحق ہوتے ہیں جبکہ $\pm \frac{۱}{۲}$ کیونکہ
ان میں سے پہلے سلسلہ کی عام رقم کی مطلق قیمت کو $\frac{۱}{۲}$ سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل
ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۱+۲} = \frac{(۱+۲)(۲+۲)}{۲-۲(۲)} = \frac{(۱+۲)(۱+۲)}{۲-۲(۲)} = \frac{۱}{۱+۲}$$

$$\frac{۳}{۲} = (1 - \frac{۱}{۱+۲})$$

اور اس طرح معلومہ جانچ کی بموجب سلسلہ مستحق ہے۔ اسی طرح یہ
دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۶) مستحق ہے۔ دفعہ ۲۰۷ میں بیان کردہ

آئیل کے مسئلہ کی بموجب سلسلے (۵) اور (۶) قیمتوں جم $\frac{۱}{۲}$ م π

$$\pm جب \frac{۱}{۲} م کی طرف مستحق ہوتے ہیں جبکہ $\pm \frac{۱}{۲} م - \pi$$$

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م ذ} \setminus \text{جم ذ} = ۱ - \frac{۱-۲}{۲} \text{جب ذ} + \frac{(۱-۲)(۲-۳)}{۲} \text{جب ذ} - \dots \dots (۷)$$

$$\text{جب م ذ} \setminus \text{جم ذ} = \text{م جب ذ} - \frac{۲(۲-۳)}{۳} \text{جب ذ}$$

$$+ \frac{۲(۲-۳)(۳-۴)}{۴} \text{جب ذ} - \dots \dots (۸)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ذ $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔

سلسلے (۷) اور (۸) درست نہیں جبکہ ذ $\pm \frac{۱}{۲}$ ۔

(277)

سلسلہ (۷) صرف اس وقت ختم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح عدد ہو اور سلسلہ (۸) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔
۲۱۵۔ اگر ہم جم م ذ + خر جب م ذ کے لیے وہ سلسلہ لیں جو (۷) اور (۸) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خر جب ذ رکھیں تو چونکہ (جم ذ + خر جب ذ) = (۱ + ی) = (۱ + ی) ہمیں یہ پھیلاؤ ملتا ہے

$$(۱ + ی) = ۱ + م ی + \frac{۲-۳}{۲} ی + \frac{۲(۲-۳)}{۳} ی + \frac{۲(۲-۳)(۳-۴)}{۴} ی$$

$$+ \dots + \frac{۲(۲-۳) \dots (۲-۳-۳)}{۱-۳} ی - ۱$$

$$+ \frac{۲(۲-۳) \dots (۲-۳-۳)}{۳} ی + \dots$$

اسی طرح (۷) اور (۸) سے

$$\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^3} + \dots \right) = \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^3} + \dots$$

$$+ \frac{(1-y^2)(1-y^4)\dots(1-y^{2n})}{(1-y^{2n+1})} +$$

$$+ \frac{(1-y^2)(1-y^4)\dots(1-y^{2n})}{(1-y^{2n+1})} + \dots$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ یہ پھیلاؤ درست ہیں م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ y کا مقیاس ایک سے کم ہو۔ بعض مصنفین ان پھیلاؤں کو بلا واسطہ راست حاصل کرتے ہیں اور پھر سلسلوں (۵)، (۶)، (۷)، (۸) کو اخذ کرتے ہیں۔ لیکن ان سلسلوں کو ابتدائی طریقوں سے دریافت کرنا آسان نہیں ہے الا آنکہ y کا مقیاس ایک سے کم ہو، ہمیں اس قید کے ساتھ حجم مذہ جب مذہ کے لیے یہ سلسلے حاصل ہونگے صرف اس وقت جبکہ مذہ $\pm \frac{1}{p}$ کے درمیان واقع ہو اور یہی قید سلسلوں (۱) اور (۲) کے لیے لازم ہے۔ تاہم تسلسل کے اصول کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کے پھیلاؤ، ان سلسلوں کے استدقاق کی وسعت $|y| > 1$ میں درست ہیں۔

۲۱۶۔ اگر سلسلوں (۵) اور (۶) میں مذہ کی بجائے $\frac{1}{p} - \pi$ قہ

رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو ذہ کی صفر اور π کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

$$(9) \quad \text{جم م} \left(\frac{\pi}{4} - \text{ذہ} \right) = 1 - \frac{\text{م}^2}{4} \text{جم ذہ} + \frac{\text{م}^2 (\frac{\pi}{2} - \text{م}^2)}{16} \text{جم ذہ} - \dots$$

$$(10) \quad \text{جب م} \left(\frac{\pi}{4} - \text{ذہ} \right) = \text{م جم ذہ} - \frac{\text{م} (\frac{\pi}{2} - \text{م}^2)}{4} \text{جم ذہ} + \dots, \dots$$

اب ہم جم م ذہ اور جب م ذہ کے لیے سلسلے معلوم کر سکتے ہیں جبکہ ذہ کی کوئی قیمت ہو۔ اگر ذہ = π ر + فی جہاں ذہ، $\pm \frac{\pi}{4}$ کے (278) درمیان ہے اور ر ایک صحیح عدد ہے تو

جم م ذہ = جم م ر + جم م ذہ - جب م ر + جب م ذہ
نیز جب ذہ = (1 - ا) جب ذہ - پس اگر ذہ = $(\frac{1}{4} \pm \text{ر}) \pi$ کے درمیان واقع ہو

$$\text{جم م ذہ} = \text{جم م ر} + \pi (1 - \frac{\text{م}^2}{4} \text{جب ذہ} + \dots)$$

$$- \text{جب م} (1 - \text{ا}) \pi \left\{ \text{م جم ذہ} - \frac{\text{م} (\frac{\pi}{2} - \text{ا})}{4} \text{جب ذہ} + \dots \right\}$$

$$(11) \quad \dots$$

اسی طرح

$$\text{جب م ذہ} = \text{جب م ر} + \pi (1 - \frac{\text{م}^2}{4} \text{جب ذہ} + \dots)$$

$$+ \text{جم م} (1 - \text{ا}) \pi \left\{ \text{م جم ذہ} - \frac{\text{م} (\frac{\pi}{2} - \text{ا})}{4} \text{جب ذہ} + \dots \right\} \dots (12)$$

لے ضابطوں (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) کو ڈی - ایف - گرگوری نے

Cambridge Mathematical Journal vol. IV میں شائع کیا تھا۔

$$\text{جم } \frac{1}{3} \pi = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} + \dots (14)$$

$$\text{جب } \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} - \dots \right] (18)$$

(279) π کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے موصول کیے جاسکتے ہیں اس کے لیے
جم $\frac{1}{3} \pi = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ کو لاکھ قوتوں میں پھیلا دیا جائے اور لاکھ
قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے متناظر قوت کے سروں کے مساوی
رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے $\frac{1}{2}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{3} \pi = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \right]$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی حیب کی قوتوں میں

۲۱۸ — اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم m ذہ، جب m ذہ کے لیے
جب m ذہ کی قوتوں میں ہیں ہم ان سلسلوں کو m کی صعودی قوتوں کے
سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں
کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{m}{2} \text{ جب } m \text{ ذہ} + \frac{m(m+2)}{2} \text{ جب } m \text{ ذہ} + \dots$$

$$m \text{ جب } m \text{ ذہ} + \frac{m(m+1)}{2} \text{ جب } m \text{ ذہ} + \dots$$

مستحق ہیں تو ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو جم مذ جب م مذ کے پھیلاؤں کے (جو مذ کی قوتوں میں ہوں) تناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۶) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مذ} = \text{جب مذ} + \frac{1}{2} \text{جب}^2 + \frac{1}{3} \text{جب}^3 + \frac{1}{4} \text{جب}^4 + \dots + \frac{1}{n} \text{جب}^n$$

$$(19) \dots + \frac{(1-12) \dots 5 \times 3 \times 1}{1+12 \dots 12 \dots 6 \times 3 \times 2} \text{جب}^{12} + \dots$$

اور (۵) سے

$$\text{مذ}^2 = \text{جب}^2 \text{مذ} + \frac{2}{3} \text{جب}^3 + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \text{جب}^4 + \dots + \frac{2 \times 2}{3} \text{جب}^5 + \dots$$

$$(20) \dots + \frac{(2-12) \dots 2 \times 2}{(1-12) \dots 5 \times 3} \text{جب}^{12} + \dots$$

یہ درست ہیں $\pm \frac{1}{n} \pi$ کے درمیان مذ کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ مذ $= \pm \frac{1}{n} \pi -$ ہم ان کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$(19) \dots + \frac{1}{n} \text{جب}^n + \frac{1}{3} \text{جب}^3 + \frac{3 \times 1}{5 \times 2} \text{جب}^5 + \dots + \frac{1}{n} \text{جب}^n$$

$$(20) \dots + \frac{2}{n} \text{جب}^n + \frac{2}{3} \text{جب}^3 + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \text{جب}^5 + \dots + \frac{2}{n} \text{جب}^n$$

جہاں جب^۱ لا دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی حادہ زاویہ ہے جس کی جیب ۱ کے مساوی ہے۔

سلسلہ (۱۹) کو نیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریق ثبوت کوشی کا

جیب اور جیب التمام کی قوتوں کو وضعی زاویوں کی جیب اور جیب التمام میں بیان کرنا

۲۲۰۔ — اب ہم یہ دکھانگے کہ شکل جہ ط جب ط کے جہ ط
کس طرح آسانی کے ساتھ ط کے وضعوں کی جیب یا جیب التمام میں
بیان کیے جاسکتے ہیں۔ ہم اول تو اس صورت تک اپنی توجہ محدود
رکھینگے جس میں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کر دو کہ
= جہ ط + خ جب ط، تب تی = جہ ط۔ خ جب ط، پس ۲ جہ ط = ی + تی
اور ۲ خ جب ط = ی - تی، اور

$$(۲ جہ ط) (۲ خ جب ط) = (ی + تی) (ی - تی)$$

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو ی اور تی کی قوتوں میں پھیلایں تو
نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جاسکتا ہے جس کی رقیں
ان دو شکلوں ک (ی + تی) ک (ی - تی) میں سے ایک کے مانند
ہونگی جہاں ک ایک ضارب ہے جو م، ن اور ر پر منحصر ہے۔
اب ی = جہ ط + خ جب ط اور تی = جہ ط - خ جب ط
بوجب مسئلہ ڈیموار۔ اس لیے

$$ک (ی + تی) = ۲ جہ ط،$$

$$ک (ی - تی) = ۲ خ جب ط$$

دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

$$۲ (\pm \text{جم } \frac{1}{۲} \text{ ذہ }) \text{جم م} (\frac{1}{۲} \text{ ذہ } - \text{ک } ۲)$$

$$= ۱ + \text{م جم ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{جم } ۲ \text{ ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{جم } ۳ \text{ ذہ} + \dots$$

$$۲ (\pm \text{جم } \frac{1}{۲} \text{ ذہ }) \text{جب م} (\frac{1}{۲} \text{ ذہ } - \text{ک } ۲)$$

$$= \text{م جب ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{جب } ۲ \text{ ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{جب } ۳ \text{ ذہ} + \dots$$

جہاں ذہ (۲ ک - ۱) ۲ اور (۲ ک + ۱) ۲ کے درمیان واقع ہے سلسلہ اول

کو جم م سے اور سلسلہ دوم کو جب م سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$۲ (\pm \text{جم } \frac{1}{۲} \text{ ذہ }) \text{جم م} (\text{عہ} - \frac{1}{۲} \text{ م ذہ} + \text{م ک } ۲) = \text{جم م} (\text{عہ} - \text{م}) \text{جم م} (\text{عہ} - \text{ذہ})$$

$$+ \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{جم م} (\text{عہ} - ۲ \text{ ذہ}) + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{جم م} (\text{عہ} - ۳ \text{ ذہ}) + \dots$$

جہاں ذہ (۲ ک - ۱) ۲ اور (۲ ک + ۱) ۲ کے درمیان واقع ہے۔ فرض کر دو کہ ذہ = ۲ ط

تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

$$۲ \text{جم م ط جم م} (\text{عہ} - \text{م ط} + ۲ \text{ م س } ۲)$$

$$= \text{جم م} + \text{م جم م} (\text{عہ} - ۲ ط) + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{جم م} (\text{عہ} - ۲ ط) + \dots$$

جہاں ط ۲ س ۲ - ۲ ک + ۲ اور ۲ س ۲ + ۲ کے درمیان واقع ہے۔

لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

$$۲) \text{ (-) جم ط) جم (ع-م ط + م ۲ س + ۱) } \pi$$

$$= \text{جم ع + م جم (ع-۲ ط) + } \frac{م(۱-۲)}{۲} \text{ جم (ع-۲ ط) + ...}$$

جہاں ط، ۲ س + ۱ + ۱/۲ اور ۲ س + ۱ + ۳/۲ کے درمیان واقع ہے۔
ان تینوں میں رکھو ع = م ط تو

$$۲) \text{ جم ط جم ۲ م س } \pi$$

$$= \text{جم م ط + م جم (م-۲ ط) + } \frac{م(۱-۲)}{۲} \text{ جم (م-۲ ط) + ... (۲۵)}$$

(283) جہاں ط، ۲ س - ۱ - ۱/۲ اور ۲ س + ۱ + ۱/۲ کے درمیان واقع ہے، نیز
۲) (-) جم ط) جم (۱ + ۲ س) م

$$= \text{جم م ط + م جم (م-۲ ط) + } \frac{م(۱-۲)}{۲} \text{ جم (م-۲ ط) + ... (۲۶)}$$

جہاں ط، ۲ س + ۱ + ۱/۲ اور ۲ س + ۱ + ۳/۲ کے درمیان واقع ہے۔
پھر رکھو ع = م ط + ۱/۲ تو

$$۲) \text{ جم ط جب ۲ م س } \pi$$

$$= \text{جب م ط + م جب (م-۲ ط) + } \frac{م(۱-۲)}{۲} \text{ جب (م-۲ ط) + ...}$$

(۲۷) جہاں ط، ۲ س - ۱ - ۱/۲ اور ۲ س + ۱ + ۱/۲ کے درمیان واقع ہے، نیز
۲) (-) جم ط) جب (۱ + ۲ س) م

$$= \text{جب م ط + م جب (م-۲ ط) + } \frac{م(۱-۲)}{۲} \text{ جب (م-۲ ط) + ... (۲۸)}$$

جہاں ط، ۲ س + ۱ + ۱/۲ اور ۲ س + ۱ + ۳/۲ کے درمیان واقع ہے۔
پھر ط کو ط - ۱/۲ میں بدلو اور رکھو ع = م ط تو

$$۲) \text{ جب ط جم م (۲ س + ۱/۲) } \pi$$

$$= \text{جم م ط} - \text{م جم (م-۲) ط} + \frac{\text{م (م-۱)}}{\text{ط}} \text{جم (م-۳) ط} - \dots - \dots (۲۹)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور ۲ (۱+س ۲) کے درمیان واقع ہے، نیز
۲ (جب ط) ۲ جم م (۲ س + ۳) ۲

$$= \text{جم م ط} - \text{م جم (م-۲) ط} + \frac{\text{م (م-۱)}}{\text{ط}} \text{جم (م-۳) ط} - \dots - \dots (۳۰)$$

جہاں ط، ۲ (۱+س ۲) اور ۲ (۲+س ۲) کے درمیان واقع ہے -
بالآخر رکھو = م ط + ۱/۲ ۲ اور ط کو ط - ۱/۲ ۲ میں تبدیل کرو تو
۲ (جب ط) ۲ جب م (۲ س + ۱/۲) ۲

$$= \text{جب م ط} - \text{م جب (م-۲) ط} + \frac{\text{م (م-۱)}}{\text{ط}} \text{جب (م-۳) ط} - \dots - \dots (۳۱)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور ۲ (۱+س ۲) کے درمیان واقع ہے، نیز
(۲ جب ط) ۲ جب م (۲ س + ۳) ۲

$$= \text{جب م ط} - \text{م جب (م-۲) ط} + \frac{\text{م (م-۱)}}{\text{ط}} \text{جب (م-۳) ط} - \dots - \dots (۳۲)$$

جہاں ط، ۲ (۱+س ۲) اور ۲ (۲+س ۲) کے درمیان واقع ہے -
یہ سلسلے ط کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہیں اگر مثبت ہو - اگر م
صفر اور - ۱ کے درمیان واقع ہے تو ط کی انتہائی قیمتیں ۲ س ۲ ± ۱/۲ ۲ یا
۲ س ۲ (۱+س ۲) ۲ خارج کرنی چاہئیں کیونکہ ط کی ان قیمتوں
کے لئے سلسلے مستحق نہیں ہوتے -

اکیل نے ثنائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اس دفتہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان
کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے ان پر نظر نہیں ڈالی -

(284)

پندرہواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکاتم

قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳ - لا انتہائی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

پر غور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کریں گے جہاں ی
مختلف عدد لا + خ ما ہے۔ اگر ی کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت
ن ویں رقم کے ساتھ $\frac{1}{n}$ ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑھتا ہے۔
پس ابتدائی سلسلہ ی کی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستحق ہے۔
اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکز ی =
پر ہو یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

۲۲۴ - ی اور ی کے جواب میں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں انکو

باہم ضرب دیا جائے تو ی، اور ی، میں م دیں درجے کی رقم ہے

$$\frac{y_1}{1-m} + \frac{y_1}{1-m} + \frac{y_2}{1-m} + \frac{y_2}{1-m} + \dots + \frac{y_m}{1-m} + \frac{y_m}{1-m}$$

جو مسئلہ ثنائی کی رُو سے $\frac{1}{1-m}$ (ی، + ی،) کے مساوی ہے کیونکہ
م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرہ صدر دو سلسلوں کے حامل ستر
کے لئے یہ سلسلہ

$$1 + (y_1 + y_2) + \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + \dots + \frac{(y_1 + y_2)^m}{m} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو ق (ی، + ی،) کی طرف مستقر ہوتا ہے۔ اب
دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ قوت غالی سلسلے دونوں
مطلقاً مستقر ہیں انکے مجموعوں کا حامل ضرب مندرجہ بالا حاصل ضربی
سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے، اس لئے

$$Q(y_1) \times Q(y_2) = Q(y_1 + y_2) \dots \dots \dots (1)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً اخذ کرتے ہیں

$$Q(y_1) \times Q(y_2) \times \dots \times Q(y_n) = Q(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

(285)

$$\text{اور اسلئے } \{Q(y_1)\}^n = Q(ny_1) \dots \dots \dots (2)$$

جہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۲۵۔ اگر مساوات (۲) میں ی = ۱ رکھا جائے تو

$$Q(n) = \{Q(1)\}^n$$

فو^۱ کی انتہا ہے جبکہ صیج عدد م لا انتہا بڑھا دیا جائے؛ یہ معلوم ہے کہ یہ انتہا موجود ہوتی ہے اور اسکی قیمت منطق عددوں کے کسی مخصوص توازن پر جو دئے ہوئے غیر منطق عدد لا کی تعریف کے لئے استعمال ہوا ہو منحصر نہیں ہوتی۔ چونکہ ق (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ق (لا) = ق (لام) کی انتہا ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔ پس چونکہ فو^۱ = ق (لام) م کی ہر قیمت کے لئے اسلئے فو^۱ = ق (لا) جبکہ فو^۱ اپنی صدر قیمت اختیار کرے۔

ثابت کیا اگر لا کوئی منفی حقیقی عدد ہو تو چونکہ

$$ق (لا) = ق (- لا) = ق (-) = ۱$$

اسلئے ق (لا) = $\frac{۱}{لا}$ = فو^۱ جہاں فو^۱ اپنی صدر قیمتیں رکھتیں۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ کسی حقیقی عدد لا کیلئے سلسلہ

$$۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲!} + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ، فو^۱ کی صدر قیمت ہے جہاں فو^۱ کی تعریف

ق (لا) = فو^۱ سے ہوئی ہے۔ یہ قوت غائی سلسلہ ایک حقیقی قوت غما کے لئے ہے۔

۲۲۶۔ اب ہم بتائیں گے کہ خواہی کوئی ملحق عدد ہو عدد ق (ی) جو ی کی قوتوں میں قوت غائی سلسلہ کا انتہائی مجموعہ ہے (۱ + ی + ی^۲ + ...)

کی انتہائی قیمت کے مساوی ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے

$$\text{رکھو } 1 + \frac{\lambda}{m} = \text{غہ جم نہ} \frac{m}{\lambda} = \text{غہ جب نہ تو}$$

$$\left(1 + \frac{\lambda + \chi}{m}\right)^m = \text{غہ}^m (\text{جم نہ} + \text{خر جب نہ}) = \text{غہ}^m (\text{جم م نہ} + \text{خر جب م نہ})$$

حسب مسئلہ دیوائر۔

نیز

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda}{m} + \frac{\lambda^2}{m} + 1} = \text{غہ}$$

اور نہ، مس' $\frac{m}{\lambda + m}$ کی صدر قیمت ہے۔ غہ کی انتہائی قیمت

$$\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^m \left\{1 + \frac{\lambda}{m(\lambda + m)}\right\}^m$$

کی انتہائی قیمت ہے یا

$$\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^m \left\{1 + \frac{\lambda}{m(\lambda + m)}\right\}^m$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ λ ، m ، $\lambda + m$ سے کم ایک ثابت مثبت عدد ہے، تب

$$\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^m \left\{1 + \frac{\lambda}{m(\lambda + m)}\right\}^m$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^m \left\{1 + \frac{\lambda}{m}\right\}^m$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور λ کے درمیان۔ اب چونکہ

شرط $R > M + M + M$ کے تحت رکھو اس قدر بڑا بنایا جاسکتا ہے
جس قدر ہم چاہیں اس لئے

$$\left\{ 1 + \frac{M^2}{M + M} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

کی انتہا ایک ہے اور اس لئے غم کی انتہا ق (لا) ہے جو ق کی
صدر قیمت ہے۔ م سنا $\frac{M}{M + M}$ کی انتہائی قیمت، $\frac{M}{M + M}$ کی
انتہائی قیمت ہے جو ما ہے، پس

$$\text{نہا} (1 + \frac{M + M}{M}) = \text{نو} (\text{جم} + \text{م} + \text{خر جب م})$$

جہاں نو اپنی صدر قیمت رکھتا ہے، اس طرح
ق (لا + خر ما) = نو (جم + م + خر جب م)

(288)

دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ

۲۲۸۔ اگر ہم دفعہ سابق کے آخری نتیجہ میں لا = رکھیں تو

$$\text{ق} (\text{خر ما}) = \text{جم} + \text{م} + \text{خر جب م}$$

$$\text{اس لئے } \text{جم} + \text{م} + \text{خر جب م} = 1 + \text{خر ما} - \frac{M^2}{M} - \text{خر} \frac{M^2}{M} + \dots$$

یا اس مساوات کی طرفین میں خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے
سے

ایک تو اتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم نو سے بالعموم ق (دی) کی
صدر قیمت مراد لینگے۔

اگر ی حقیقی عدد نہ ہو تو نو کی کوئی تعریف تا حال

نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رفر ہے۔

لیکن رفر نو یا لا + خ ما کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنا نا سہولت

پیدا کرتا ہے۔ ہم نو کو جو معنی پہنائینگے اس کا صرف ایک جزو ہوا

بیان کریں گے یعنی صرف اسکی تعریف کریں گے جسکو نو کی صدر قیمت کہا جاسکتا

ہے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

تفاعل نو کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کریں گے کہ

(289)

وہ تفاعل ق (دی) ہے یا (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل (ا + م) (ی)

کی انتہا ہے جبکہ م کو مثبت صحیح قیمتوں میں سے لا انتہا

بڑھا دیا جائے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ لا + خ ما کی صدر قیمت کی یہ تعریف

ایسی ہے کہ یہ تفاعل قوتوں کے معمولی قانون کو پورا کرتا ہے یعنی

$$\begin{array}{c} \text{لا} + \text{خ ما} \quad \text{لا} + \text{خ ما} \quad \text{لا} + \text{لا} + \text{خ} + \text{ما} + \text{ما} \\ \text{و} \quad \text{و} \quad \text{و} \\ \text{و} = \text{و} \times \text{و} \end{array}$$

لہ تعریف کی یہ آخری شکل Schlömilch کی مجوزہ ہے دیکھو

یہ دفعہ ۲۲۴ کے مسئلہ (۱) سے مستنت ہوتا ہے۔ ہم بالعموم رمز نو سے جب کبھی یہ استعمال ہو اسکی صدر قیمت (ق) (ی) حسب تعریف بالا، مراد لینگے۔

۲۳۰۔ رمز نو + خرما کے مفہوم سے متعلق اس قرار داد کے بعد دفعہ ۲۲۴ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{نو} + \text{خرما} = \text{نو} (\text{جم} + \text{خر جب ما})$$

اور لا = ۰ رکھنے سے $\text{نو} + \text{خرما} = \text{جم} + \text{خر جب ما}$
مسئلہ (۵) کو اب لکھا جاسکتا ہے

$$\left. \begin{aligned} \text{جم} + \text{ما} &= \frac{1}{4} (\text{نو} + \text{خرما}) \\ \text{جب} + \text{ما} &= \frac{1}{4} (\text{نو} - \text{خرما}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (۶)$$

انکو جیب التمام اور جیب کی قوت ثنائی قیمتیں کہتے ہیں۔ طالب علم

کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶) مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمز نو کے طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جا چکا ہے۔ رمز نو + خرما کو رمز ق (خرما) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ

قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۴ میں دیا گیا ہے بہت جلد ذہن میں آجاتا ہے۔ مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت نماؤں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت نماؤں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہو گا جو

(۱) سے بیان ہوتا ہے۔
۲۳۰۔ تفاضل نو کی تعریف، ی کی کسی ملحق قیمت کیلئے

اوپر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت ثنائی سلسلہ

$$\dots\dots\dots + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{2} + y + 1$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{y^s}{s} + \frac{y^s}{s} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{y^{s+1}}{s+1} + \frac{y^{s+1}}{s+1} + \dots\dots\dots$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left\{ \dots\dots\dots + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{2} + y + 1 \right\} \frac{y^{s+1}}{s+1} > \frac{y^{s+1}}{s+1} \quad (290)$$

$$y > \frac{y^{s+1}}{s+1}$$

اگر $y > 1$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left\{ \dots\dots\dots + y^2 + y + 1 \right\} \frac{y^{s+1}}{s+1} > \frac{y^{s+1}}{s+1}$$

$$y > \frac{y^{s+1}}{s+1}$$

اس طرح ہم دکھا چکے کہ

$$قو^1 = ۱ + ی + \frac{قو^2}{۲} + \dots + \frac{قو^s}{s} (۱ + عس)$$

جہاں $اعس > \frac{ای۱}{۱+۱}$ قو^۱، اور اسلئے $اعس$ صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے جبکہ $ای$ صفر کی طرف مستقر ہو۔ خاص صورت میں $س = ۱$ لینے سے سلسلہ $قو^1 = ۱ + ی (۱ + ع۱)$ حاصل ہوتا ہے جہاں $اع۱ > \frac{۱}{۲}$ $ای۱$ قو^۱، اور اسلئے $اع۱$ صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے جبکہ $ای$ صفر کی طرف مستقر ہو۔ ہم اس نتیجہ کو شکل

$$ہی۱ = \frac{قو^1 - ۱}{ی}$$

میں بیان کر سکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے ہی۱ = $\frac{قو^{۱+۲} - قو^۱}{ی}$ اور

اس لئے تفاعل $قو^۱$ ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔ علم تحلیل میں تفاعل $قو^۱$ کی ابتدا اس تعریف کے ساتھ کیجا سکتی ہے کہ وہ ایسا تفاعل $ع$ ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$$\frac{فرع}{قو^۱} = ع^۱ ی کی ہر قیمت کے لئے$$

$$ع = ۱ جبکہ ی = ۰$$

اور

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستحق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے مشتق سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$ میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستحق ہوتے ہیں۔ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو ϵ سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے $\frac{\epsilon}{x}$ ہے۔ اگر اب $\frac{\epsilon}{x} = \epsilon$

تو ہم متناظر قوتوں کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں اس طرح $۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = \dots$ اور اسلئے $۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = \dots$ ہیں یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$\epsilon = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$ اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استفادہ کی مسئلہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط $\frac{\epsilon}{x}$ کو پورا کرتا ہے۔ اگر $\epsilon = ۱$ جبکہ $۱ = ۱$ ۔ تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے $۱ = ۱$ ۔ اس طرح ہم سلسلہ

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت

(291)

۲۳۱۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ $(ی) = (و) (جم + خ جب ما)$ اب چونکہ $ما$ میں ۲ جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

صحیح عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق (ی) = ق (ی)
 (+ ۲ خ رک π) یعنی ق (ی) دوری (periodic) تفاعل ہے
 جسکا دور ۲ خ π ہے۔ چونکہ $\omega = \omega + 2\pi$ اسلئے قوت نامی تفاعل
 ω دوری ہے اور اسکا خیالی دور ۲ خ π ہے، نیز چونکہ $\omega_X =$
 ω_Y (ی + ۲ ک π) اس لئے ω_X ، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی
 دور ۲ π ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ ω_X میں سے ہر ایک تفاعل ایک

دوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دور ۲ خ π ہے اور دوسرے
 تفاعل کا حقیقی دور ۲ π ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے
 مبادیات سے واقف ہے جان لیگا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے
 جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دوری کہتے ہیں
 ۲۳۲۔ دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف
 کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی
 حصہ میں انکو ایک زاویائی مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال
 کیا ہے جہاں یہ زاویائی مقدار دائری ناپ میں محسوب کی گئی تھی لیکن
 ہم اس زاویائی مقدار کے تصور کو خارج کر سکتے ہیں اور انکو (جم ما) (جو)
 ایک متغیر کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں، بلاشبہ متغیر کی کوئی قیمت
 اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمائش کرتی ہے
 جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی
 بڑی اہمیت انکی اس خاصیت کی وجہ سے ہے کہ وہ یک دوری
 تفاعل ہیں۔ فوریر اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام
 تفاعل جو ایک حقیقی دور رکھتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک

سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تعبیر کئے جاسکتے ہیں لیکن علم تحلیل کی اس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳۔ دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور ان تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصاء ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندسی تعلقات سے آزاد ہو۔ ان تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔ ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف ان مساواتوں

(292)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ی} = \frac{1}{4} \{ \text{ق (خ ی)} + \text{ق (- خ ی)} \} \\ \text{جب ی} = \frac{1}{4} \{ \text{ق (خ ی)} - \text{ق (- خ ی)} \} \end{array} \right. \dots (4)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق (ی) سے سلسلہ + ی + $\frac{1}{4}$ + ... کا

انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots \text{ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی}$$

$$\text{کی تعریف سلسلہ ی} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \text{ کے انتہائی مجموعہ}$$

کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم ان کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں، اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو قبل ذکر ہندسی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کے ماٹل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۱۲۳۰ میں ثابت کردہ مسئلہ $فوی = ۱ + ی + \frac{۲}{۲} + \dots + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \dots + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$ بس

کو استعمال کرنے سے جہاں $ا ب س$ $\frac{ای | اس |^{۱+اس}}{۱+اس}$ $فوی$ $ای$ ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر $ی$ کو $خ$ اور $خ$ میں تبدیل کیا جائے اور $س = ۱ + ۲$ فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

جم $ی = ۱ - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} - \dots + (-۱)^{۲} \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$ ب م

جہاں $ا ب م$ $\frac{ای | اس |^{۲+۲}}{۲+۲}$ $فوی$ - بالخصوص جم $ی = ۱ + ب$

جہاں $ا ب$ $\frac{ای | اس |^{۱+۱}}{۱+۱}$ $فوی$ اور جم $ی = ۱ - \frac{۱}{۱} + ب$ جہاں

$ا ب$ $\frac{ای | اس |^{۲}}{۲}$ $فوی$

نیز $ای > ا$ کی صورت میں ہمیں مائل ہوتا ہے

$ا ب$ $\frac{ای | اس |^{۲}}{(۱-۱)۲}$

اور $ا ب$ $\frac{ای | اس |^{۲}}{(۱-۱)۲}$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب } ی = ی - \frac{۳}{۳} ی + \frac{۵}{۵} ی - \dots + (۱ - ۱) م + \frac{۱ + ۲}{۱ + ۲} ی + س م$$

$$\text{جہاں } س م > \frac{۱ + ۲}{۳ + ۲} ی \text{، اور بالخصوص جب } ی = ی + س م \quad (293)$$

$$\text{جہاں } س م > \frac{۲}{۳} ی \text{، اور جب } ی = ی - \frac{۱}{۴} ی + س م$$

$$\text{جہاں } س م > \frac{۵}{۵} ی \text{، اگر } ی > ۱ \text{ تو نیز حاصل ہوتا ہے}$$

$$س م > \frac{۳}{۱ - ۱} ی \text{، } س م > \frac{۱}{۵(۱ - ۱)} ی$$

۲۳۳ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تقاطعات جم ی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ چونکہ

جم ی + خ جب ی = ق (خ ی) اور جم ی - خ جب ی = ق (-خ ی)

اسلئے جم ی + جب ی = ق (خ ی) ق (-خ ی) = ق (۰) = ۱

$$\text{جم (ی + ی)} = \frac{۱}{۴} \{ ق (خ ی + خ ی) + ق (-خ ی - خ ی) \}$$

$$= \frac{۱}{۴} \{ ق (خ ی) ق (خ ی) + ق (خ ی) ق (-خ ی) \}$$

$$= \frac{۱}{۴} \{ ق (خ ی) + ق (-خ ی) \} ق (خ ی) ق (-خ ی)$$

+ ۱/ {ق (خری) - ق (خری)} {ق (خری) - ق (خری)}

یا جم (ی + ی) = جم ی، جم ی، جب ی، جب ی،

اسی طرح جب (ی + ی) = جب ی، جم ی، جم ی، جب ی،

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

۲۳۵ - فرض کرو کہ ہم مساوات ق (ی) = ا پر غور کرتے ہیں۔

اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = کے۔

کیونکہ توت نامی سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ

اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے، اور نہ ہی کوئی منفی

حقیقی اصل۔ لا ہو سکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا

بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (- لا) ق (لا) = ا سے ظاہر ہے۔

نیز مساوات ق (ی) = ا کی کوئی ملحق اصل ع + خ نہیں

ہو سکتی جہاں ا ع - - کیونکہ اگر ع + خ بہ اصل ہو تو ع - خ بہ

بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲ ع) = ق (ع + خ بہ) ق (ع - خ بہ) =

جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ ع اصل نہیں ہو سکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ا کی اصلیں اصل

ی = کے سوا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے

کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا

کہ مساوات ق (خ بہ) - ق (- خ بہ) = یعنی جب بہ = کی ایک

حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر یہ ایسی ایک اصل ہو تو

$$ق (۲ خ بہ) = {ق (خ بہ)} = ۱$$

اور اس طرح ق (ی) = ا کی ایک اصل ۲ خ بہ ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تفاعل جب بہ کو جو سلسلہ

$$۱ - \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} - \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (ب) سے تعبیر کیا جائے تو
ف (ب) مثبت ہے بہ کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ $0 \leq b \leq 3$
اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ $b = 3$ ۔ اس سے نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ
۳ اور ۴ کے درمیان ایک قیمت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق
تعداد کے لئے ف (ب) صفر ہے، اور کسی صورت میں ف (ب) = ۰۔
کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان ہے
اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں۔

اگر ب مثبت ہو اور 2.07 سے کم تو ف (ب) کے سلسلہ میں
ہر رقم، بے استثنا کے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدداً بڑی ہے۔
اس لئے ف (ب) $1 - \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^2}{7} + \dots$ ، ب کی ان
قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہو۔

اب ۱ - $\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^2}{7} + \dots$ کو ف (ب) سے تعبیر کرنے سے
معلوم ہوتا ہے کہ ف (۳) = $\frac{1}{6}$ جو مثبت ہے، اور ف (۰) = ۱

نیز مشتق تفاعل ف (ب) = $2 - \frac{1}{3} - \frac{b^2}{5} + \frac{b^2}{7} - \dots$ منفی ہے
جبکہ ب، صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$1 - \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^2}{7} + \dots < \frac{1}{3} - \frac{b^2}{5} + \frac{b^2}{7} - \frac{b^2}{9} + \dots < 0$$

پس ف (ب) ایک سے $\frac{1}{6}$ تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے ب

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے، اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (بہ) صفر اور ۳ کے درمیان بہ کی قیمتوں کے لئے معدوم نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$ف (۴) > ۱ - \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۷} + \frac{۲}{۹}$$

$$> ۱ - \frac{۱}{۱۵} - \frac{۴}{۱۵} \times \frac{۲۵۶}{۱۸۹}$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (بہ) کی کم سے کم ایک اصل موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔

ف (بہ) = کی عدد اچھوٹی سے چھوٹی اصل کو π سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق (ی) = کی ایک اصل $\pi ۲$ خ ہے اور اس سے صغیر تر مقیاس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ نقطہ نظر سے عدد π کی تعریف اس عدد سے کی جاتی ہے جو مساوات ق (۲ π خ) = کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ کوئی عدد صفر سے مختلف صغیر تر مقیاس کے ساتھ مساوات ق (ی) = کی اصل نہ ہو۔ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی

تو ق (۲ ک π خ) = { ق (۲ π خ) }^ک = ۱ اور اسلئے مساوات ق (ی) =

کی ایک اصل ۲ ک π خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲ پ π خ موجود نہیں ہے جہاں پ ک اور ک ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ ایسی صورت میں حاصل ہونا چاہئے

ق (۲ پ π خ - ۲ ک π خ) = ق (۲ پ π خ) ق (-۲ ک π خ) = ۱

(295)

اور اس لئے ۲ (پ-ک) π خ جسکا مقیاس ۲ π خ کے مقیاس سے صغیر تر ہے ق (ی) = کی اصل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ ۲ π خ

اس اصل کو تعبیر کرتا ہے جس کا مقیاس صغیر ترین ہے۔
پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات $ق(ی) = ا$ کی سب اصلیں
شکل ۲ ک π خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور π
ایک یقین عدد ہے جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے جیسا کہ اوپر
ثابت کر دیا گیا۔

اس طرح عدد π کو تحلیلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی
کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$ق(ی + \pi \times ۲) = ق(ی) \times ق(\pi \times ۲) = ق(ی)$
اور اس لئے تفاعل $ق(ی)$ ایک دوری تفاعل ہے جس کا خیالی
دور $\pi \times ۲$ خ ہے۔

جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ
بھی دوری تفاعل ہیں جس کا دور $\pi \times ۲$ ہے، اس لئے جم $\pi \times ۲ = ۰$ جم $۱ = ۱$ اور
جب $\pi \times ۲ = ۰ = ۰$ جب $۰ = ۰$ ۔ ہم نے اب تک اس امر کی تصدیق نہیں
کی کہ π حسب تعریف بالا اس نسبت کے نمائندہ ہے جو ایک دائرہ
کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے۔ لیکن اس کی تکمیل ایک
حقیقی زاوے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے
جیب التمام یا جیب کا دور $\pi \times ۲$ ہے، عدد π کی کسی ایک تعریف کی وجہ
۲۳۶۔ نیز چونکہ $ق(خ \times \pi) = ق(خ) \times ق(\pi) = ق(۲ \times \pi) = ۱$ ،
اس لئے $ق(خ \times \pi) = ۱$ کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ $۱ + ا$ کے مساوی
نہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ $خ \times \pi = ق(ی) = ا$ کی اصل نہیں ہے۔
نیز $ق(-خ \times \pi) = ۱$ اس لئے جم $\pi = ۱$ جب $\pi = ۰$ ۔

پھر چونکہ $ق(خ \times \pi) \times ق(خ \times \pi) = ق(۲ \times \pi) = ۱$ ۔

اور $ق(خ \times \pi) \times ق(-خ \times \pi) = ۱$

اسلئے $ق (\frac{1}{p} x -) = \pm x$ اور $ق (\frac{1}{p} x -) = \mp x$

اسلئے $ج = \frac{1}{p} \pi = -$ اور جب $\frac{1}{p} \pi = \pm 1$ ، اس ایہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر یہ حقیقی ہو تو جب کی قیمتوں ی = - اور ی = π کے درمیان لازماً مثبت ہے جیسا کہ دفعہ ۲۳۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے، اس لئے جب $\frac{1}{p} \pi = \pm 1$ - اس طرح صفر $\frac{1}{p} \pi$ ، π ، 2π کی جیب التام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد ہم جمع کے مسئلوں کے ذریعہ جیب التام اور جیب کے تفاضلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کر سکتے ہیں۔

اب تفاعلات مس ی، مم ی، قطی، قم ی کی تعریفات علی الترتیب مساواتوں مس ی = جب ی، جم ی، مم ی = جم ی، جب ی، قطی = جم ی، قم ی = جم ی کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم ان تفاعلات کی خاصیتیں معمولی طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

دائری تفاضلوں کی تمام خاصیتیں جو جو تھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں متحقق ہوئی تھیں جمع کے مضابطوں اور دور مت کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں ملحق دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۳۷ - ایک اہم صورت وہ ہے جس میں ی بالکلیہ خیالی ہو اور خ ما کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$ج = خ ما = \frac{1}{p} (ق + ق) ، جب خ ما = \frac{1}{p} (ق - ق)$$

$$مس خ ما = \frac{ق - ق}{ق + ق}$$

جملوں $\frac{1}{2}$ (نوا + قوا)، $\frac{1}{3}$ (نوا - قوا)، $\frac{1}{4}$ (نوا + قوا) کو علی الترتیب ماکہ
 زائدی جیب التمام، جیب اور ماس کہتے ہیں اور ان کو جہزما، جہزما،
 مسزما کہتے ہیں، اس طرح
 جہزما = جم خ ما، جہزما = - خ جب خ ما، مسزما = - خ مس خ ما
 ہم ان تقاعلوں پر ایک خاص باب میں غور کریں گے۔

طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر $ع = ق (ی)$ جو ملے متغیری کا ایک واحد القیست
 تفاعل ہے تو ہم $ی = ق (ا)$ کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ
 اساس نو پر $ع$ کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی
 نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ $ق (ی)$ کے لحاظ سے دوری ہے اسلئے
 مقلوب تفاعل $ق (ا)$ لامتناہی حد تک کثیر القیستی ہوگا، اگر $ی$ کی
 ایک قیمت لوک $ی$ ہو تو لوک $ع$ کی عام قیمت لوک $ع = لوک$
 $+ ۲$ خک π سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ $ق (ی) = ق (ی + ۲ + خک \pi)$
 جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بالخصوص ایک مثبت
 حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک $لا + ۲$ خک π ہونگے جہاں لوک لا کے
 کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرو $ع = ق (ی)$ ، $ع = ق (ی)$

تو چونکہ $ق (ی) \times ق (ی) = ق (ی + ی)$

اسلئے حاصل ضرب $ع، ع$ کے لوکارتم $ق (ی + ی)$ کے لوکارتم ہیں
 یعنی $ی + ی + ۲ + خک \pi$ یا

لوک $ع + لوک$ $ع = لوک (ع، ع) + ۲$ خک π

ہم جملہ ۲ خرک ۲ کو لوک (ع، عہ) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو گاہہ سکتے ہیں

$$\text{لوک (ع، عہ)} = \text{لوک ع} + \text{لوک عہ}$$

اس مساوات سے کسی ایک لوکارتم کی مخصوص قیمت تعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو لوکارتم دے گئے ہوں۔

اب فرض کرو کہ ع = غہ (جم نہ + خر جب نہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا حاصل ہوتا ہے لوک ع = لوک غہ + لوک (جم نہ + خر جب نہ) اور چونکہ غہ (خر نہ) = جم نہ + خر جب نہ اس لئے لوک (جم نہ + خر جب نہ) کی ایک قیمت خر نہ ہے اور (297) لوک غہ کی عام قیمت لوک غہ + ۲ خرک ۲ ہے پس لوک ع کی عام قیمت ہے

$$\text{لوک ع} = \text{لوک غہ} + \text{خر نہ} + ۲ \text{ خرک ۲}$$

جہاں لوک غہ سے لوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے۔

اگر نہ پر - ۲ اور ۲ کے درمیان ہونی کی قید ہو تو ہم لوک غہ + خر نہ کو لوک ع کی صدر قیمت کہیں گے اور اس کو لوک ع سے تعبیر کریں گے پس لوک ع کی عام قیمت

$$\text{لوک ع} = \text{لوک ع} + ۲ \text{ خرک ۲}$$

سے ملتی ہے جہاں لوک ع اس کی صدر قیمت اور ک مثبت یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

قی (ی) (جم ۲ک ۲ی + خر جب ۲ک ۲ی)

ہے۔ ہم اب بھی رمز نو سے اسکی صدر قیمت مراد دیتے رہیں گے۔

۲۴۲۔ دلا کی عام قیمت حسب تشریف بالا قی {ی} (لوک ۲ + خر ط

+ ۲خر ۲ک ۲ی) کے مماثل ہے جہاں $\lambda = ۲$ (جم ط + خر جب ط)

= عد + خر یہ اور ط۔ ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہے 'ی = لا

+ خر ما لکھتے سے (عد + خر یہ) + خر ما کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل

ہوتا۔ ہے

قی {لا لوک ۲۔ ط ما۔ ۲ک ۲ی + خر (مالوک ۲ + لا ط + ۲ک ۲ی لا)}

جو لا لوک ۲۔ ط ما۔ ۲ک ۲ی {جم (مالوک ۲ + لا ط + ۲ک ۲ی لا)}

+ خر جب (مالوک ۲ + لا ط + ۲ک ۲ی لا)}

کے مساوی ہے۔ اسلئے (عد + خر یہ) + خر ما کی صدر قیمت ہے

لا لوک ۲۔ ط ما {جم (مالوک ۲ + لا ط) + خر جب (مالوک ۲ + لا ط)}

جہاں $\lambda = ۲$ (عد + ۲، ط = مست' ۲

یہ ضروری نہیں کہ مست' ۲ کی صدر قیمت جس کی تعریف دفعہ ۳ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر $\lambda = ۱$ تو (جم ط + خر جب ط) + خر ما کی صدر قیمت کے لئے

تفاعل قی {خر ط (لا + خر ما) کے حاصل ہوتا ہے جسکو شکل جم (لا + خر ما) ط

+ جب (۱+۲) طہ میں لکھا جاسکتا ہے، یہ ڈیموہائر کے سہلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت ثنائی ملحق ہو۔

(299) ۲۲۳ — مساوات $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ کے درست رہنے کے لئے ہمیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ کی قیمتیں وہ ہیں جو لوگ $\frac{1}{2}$ کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورتیں $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) } \times ق { ۱ (لوگ ۱) }
 $\frac{1}{4}$ = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }
 $\frac{1}{8}$ = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }
 $\frac{1}{16}$ = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }
 $\frac{1}{32}$ = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہوگی اگر ان دو تفاعلوں $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ انخصوص مساوات $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ان تفاعلوں کی صد قیمتوں کی صورت میں درست ہے۔

۲۲۴ — جملہ $\frac{1}{2}$ کا $\frac{1}{4}$ کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن $\frac{1}{2}$ کی ہر قیمت، $\frac{1}{4}$ کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} =$ ق { ۱ (لوگ ۱) } = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }
اور $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} =$ ق { ۱ (لوگ ۱) } = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }
 $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} =$ ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) } = ق { ۱ (لوگ ۱+۲ خک ۲) }

$$\frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{s}{\sqrt{3}} - n = 1 \text{ لوک } \left\{ r - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) \right\}$$

اور اس مساوات کی طرف میں خ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{s}{\sqrt{3}} - \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{s}{\sqrt{3}} - n = 1 \text{ لوک } \left\{ r - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) \right\}$$

(300)

جہاں مقلوب تفاضلوں کی متناظر قیمتیں لگائی ہیں۔ اس مساوات کی پائین ط کا جملہ ان نراویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطر و پ، و تروں آپ آپ کے ساتھ بنا ہے، اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$\frac{s}{\sqrt{3}} - \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{s}{\sqrt{3}} - n = 1 \text{ لوک } \left\{ r - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) - \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + \text{ط} \right) \right\}$$

کسی اساس پر لوکارتم

۲۴۵۔ اگر دے کی صدر قیمت ۶ کے مساوی ہو تو ی کو ۶ کا لوکارتم اساس ۱ پر کہتے ہیں اور اسکو لوگ ۶ لکھ سکتے ہیں۔ اب دے کی صدر قیمت ق (ی لوگ ۱) ہے جہاں لوگ ۱، ۱ کا لوکارتم اساس موبر ہے، اور اگر ق (ی لوگ ۱) = ۶ تو

$$y \text{ ک } ۱ = \text{لوگ } ۶ = \text{لوگ } ۶ + ۲ \text{ خ } \pi$$

اسلئے $\text{لوگ } ۶ = \text{لوگ } ۶ + \text{لوگ } ۱ = (\text{لوگ } ۶ + ۲ \text{ خ } \pi) \text{ لوگ } ۱$
 لوگ ۶ کی صدر قیمت کو ہم $\text{لوگ } ۶ + \text{لوگ } ۱$ لیتے ہیں اور اسکو

لوک ۶ء سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس عام قیمت ہے

$$\text{لوک ۶ء} = \text{لوک ۶ء} + ۲ \text{ خک } ۲ \text{ } \backslash \text{ لوک ۶ء}$$

جو ایک کثیر القیمیت تفاعل ہے جس میں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خک ۲ \text{ } \backslash \text{ لوک ۶ء کے ضعفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت

۱ = مو میں اوپر کی تعریف دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک ۶ء کی عام قیمت کیلئے لوک ۶ء + ۲ خک ۲ حاصل ہوتا ہے۔

عام ترین لوکارتم

۲۴۶ — ہم لوکارتم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر ۱ یا ۱ کی کوئی قیمت ۶ء کے مساوی ہو تو ۱، ۶ء کا لوکارتم

اساس ۱ پر ہے اور لکھا جاسکتا ہے [لوک ۶ء] تاکہ لوک ۶ء سے جو دفعہ

سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔ ۱ کی عام ترین قیمت

ق (۱ لوک ۶ء) ہے اور اگر یہ قیمت ۶ء کے مساوی ہو تو

$$\text{ی لوک ۶ء} = \text{لوک ۶ء، یا ی (لوک ۶ء + ۲ خک ۲)} = \text{لوک ۶ء + ۲ خک ۲}$$

جہاں ک اور ک صحیح اعداد ہیں۔ پس [لوک ۶ء] کی عام قیمت

لوک ۲ء | لوک ۱ | یا (لوک ۲ + ۲ خک ۱) | (لوک ۲ + ۱ خک ۱)
 ہے جو دو طرح سے "متساوی حد تک کثیر قیمتی ہے۔ اسلئے" [لوک ۲ء]
 کی قیمتوں میں ک = ... لکھنے سے جو مخصوص جٹ حاصل ہوتا ہے ہیں
 لوکار تم لوک ۲ء شریک ہیں۔ ہم [لوک ۲ء] کو عام ترین
 لوکار تم اساس ۱ پر کہہ سکتے ہیں۔

۲۴۷ - اگر ۱ = نو تو [لوک ۲ء] = (لوک ۲ + ۲ خک ۱) | ۱۱
 ۲ + خک ۱) جو اساس نو پر ۲ کے عام ترین لوکار تم کے لئے جملہ
 ہے۔ زیادہ مقبہ لوکار تم لوک ۲ء کی صورت میں ہم نے ی کی
 (391) تعریف یہ کی تھی کہ وہ لوک ۲ء کی ایک قیمت ہے جبکہ نو کی صد
 قیمت ۲ کے مساوی ہو، لیکن عام ترین لوکار تم [لوک ۲ء] کی صورت
 میں ہم ی کو [لوک ۲ء] کی ایک قیمت سمجھتے ہیں جبکہ نو کی
 کوئی قیمت ۲ کے مساوی ہو۔

[لوک ۱] کی عام ترین قیمت ۲ خک ۱ | (۱ + ۲ خک ۱)
 ہے اور [لوک ۲] کی (۱ - ۱) کی (۱ + ۲ خک ۱) | (۲ + ۲ خک ۱)۔
 جملہ (لوک ۲ + ۲ خک ۱) | (۲ + ۲ خک ۱) پر دوسرے نقطہ
 نگاہ سے بحث کجا سکتی ہے۔ {ق (۲ + ۲ خک ۱) | (۲ + ۲ خک ۱) کی صد
 قیمت سلسلہ (۲) کی رُو سے ق (لوک ۲ + ۲ خک ۱) ہے جو ۲ کے
 مساوی ہے۔ اس لئے (لوک ۲ + ۲ خک ۱) | (۲ + ۲ خک ۱) کو دفعہ ۲۴۸

کی تعریف کی بموجب ء کا لوکارتم اساس ق (۱+۲ خک ۲) پر سمجھا جاسکتا ہے اور یہ اساس نو کی نہیں بلکہ ۱+۲ خک ۲ کی مدر قیمت ہے، اسلئے

فی الحقیقت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ء] لوک ق (۱+۲ خک ۲) کی قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ ک کو مختلف قیمتیں دیکھائیں۔ پس ہم اساس نو پر عام ترین لوکارتموں کو معمولی لوکارتم اساس نو پر نہیں بلکہ اساس ۱+۲ خک ۲ پر سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدداً نو کے مساوی ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں۔

۲۳۸۔ اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی عدد کا لوکارتم حقیقی ہو سکتا ہے یا نہیں، مثلاً $\frac{1}{2}$ کو۔ ہا تو کا لوکارتم

سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ نو کی قیمتیں \pm ہا تو ہیں۔ اس سوال کا جواب اس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارتم کے لئے اختیار کریں، اگر ہم دفعہ ۲۳۸ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی، ء کا لوکارتم ہے جبکہ نو کی مدر قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم نہیں ہو سکتا، لیکن اگر ہم دفعہ ۲۳۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی، ء کا لوکارتم ہے جبکہ نو کی کوئی قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم ہو سکتا ہے۔ اگر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

$$[\text{لوک}(-ر)] = \frac{\text{لوک} ر + (۱+۲) \text{خک} ۲}{۱+۲ \text{خک} ۲}$$

$$= \frac{\{\text{لوک} ر + (۱+۲) \text{خک} ۲\} + \{۲(۱+۲) \text{خک} ۲ - ۲(۱+۲) \text{خک} ۲\}}{۱+۲ \text{خک} ۲}$$

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک $r = (2k + 1) \times 2k$ - ہیں اگر r ہو ایسا کہ
لوک r کی شکل $(2k + 1) \times 2k$ ہو جہاں k اور k صحیح عدد
ہیں تو [لوک $(-r)$] کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک r کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد r معلوم کر سکتے ہیں
ایسا کہ جس میں اور r میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک $(-r)$]
کی ایک قیمت حقیقی ہو، کیونکہ ایک کسر $\frac{1}{n}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم
ہو سکتی ہے جو لوک r سے اس قدر کم فرق رکھے جس قدر ہم چاہیں۔ فرض کرو

لوک $r = \frac{1}{n}$ ، تب اگر q جفت ہے تو [لوک $(-r)$] کی ایک قیمت
حقیقی ہے اور $r = \frac{1}{n}$ ، لیکن اگر q طاق ہے تو $r = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$ تو $\frac{1}{2n}$

اور تو $\frac{1}{2n}$ کو s کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، یا لوک r کو $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} =$ لوک r معلوم ہو سکتا ہے

جو لوک r سے اس قدر کم فرق رکھے جس قدر ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ
[لوک $(-r)$] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ ہیں ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ
اگرچہ r کی ہر قیمت کے جواب میں [لوک $(-r)$] کی ایک قیمت حقیقی
نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد r معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ r - اتنا
چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک $(-r)$] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

لوکار ثنائی سلسلہ

۲۴۹ - $(1+y)$ کی مدد قیمت q {م لوک $(1+y)$ } ہے

اس سلسلہ کو جس سے لوک $(۱+۱)$ کی صد قیمت حاصل ہوتی ہے لوکارتمی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ سلسلہ درست ہوتا ہے جبکہ مق $۱ > ۱$ نیز دفعہ ۲۰ کی بموجب اس سلسلہ کا مجموعہ لوک $(۱+۱)$ رہتا ہے جبکہ مق $۱ = ۱$ بشرطیکہ سلسلہ مستحق ہو جو ہوگا اِلا آنکہ ۱ کی دلیل ۲۲ ہو۔

۲۲۹ ۱ — یہ مانکر کہ $۱ > ۱$ سلسلہ (۹) سے ظاہر ہے کہ

لوک $(۱+۱) = ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$ جس

جہاں ب سندق سلسلہ $\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2+s} + \dots$ کے مجموعہ

سے متجانس ہو سکتا اور اسلئے $\left[\text{جس} > \frac{1}{1+s} (۱+۱+۱+۱+\dots) \right]$

یا $\text{جس} > \frac{1}{1+s} \frac{1}{1-۱}$

پس یہ ثابت ہو چکا کہ جب $۱ > ۱$ تو

لوک $(۱+۱) = ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$ جس $(۱+۱)$

جہاں $\text{جس} > \frac{1}{1+s} \frac{1}{1-۱}$ اور اسلئے $\text{جس} > ۱$ کے ساتھ

مفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

بالخصوص $s = ۱$ لینے سے لوک $(۱+۱) = ۱$ جہاں $\frac{1}{1-۱}$

اور اس طرح $\text{جس} > ۱$ کے ساتھ مفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو

شکل

$$\text{ہنسا} = \frac{\text{لوک و } (۱+۱) - ۱}{۱} = ۰$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{اگر } ۱ \text{ سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو } (۱ + \frac{۱}{م}) =$$

م لوک و $(۱ + \frac{۱}{م})$ $\frac{۱}{م}$ جہاں $\frac{۱}{م}$ کے ساتھ صفر کی طرف مستند ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھتے دالے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تو اتر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے

ہیں کہ $(۱ + \frac{۱}{م})$ کی اہتہا ہوئے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف

اس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جاسکا ہے جس میں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اٹھ چکی ہے۔

$$۲۵۰ - ۱ = (۱ + \frac{۱}{م}) = \text{لوک و } (۱ + \frac{۱}{م}) = \text{رجم طہ} + \text{خر رجب طہ} \text{ لگنے سے}$$

$$\text{لوک و } (۱ + \frac{۱}{م}) = \text{لوک و } (۱ + \frac{۱}{م}) = \text{رجم طہ} + \text{خر رجب طہ}$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ لوک و } (۱ + \frac{۱}{۲}) = \text{رجم طہ} + \text{خر مسن } \frac{۱}{۲} \text{ رجب طہ} \setminus ۱)$$

$$+ \text{رجم طہ} \setminus ۱)$$

جہاں متغلوب ماس اپنی مدد قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل

دو سلسلے ملتے ہیں

$$\frac{1}{4} \text{ لوک } (1 + 2 \text{ رجم ط} + 3) = \text{رجم ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ رجم } 3 \text{ ط} - \dots (10)$$

$$\text{مس} \{ \text{رجم ط} \} = (1 + \text{رجم ط}) = \text{رجم ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ رجم } 3 \text{ ط} - \dots (11)$$

جہاں $r > 1$ یا $r = 1$ اور $\pi \neq \pm$
اگر $r = 1$ رکھا جائے تو

$$\text{لوک } (2 \text{ رجم } \frac{1}{4} \text{ ط}) = \text{رجم ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ رجم } 3 \text{ ط} - \dots (12)$$

$$\frac{1}{4} \text{ ط} = \text{رجم ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 2 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ رجم } 3 \text{ ط} - \dots (13)$$

جہاں $\pi \neq \pm$ کے درمیان واقع ہے اور $\pi \neq \pm$ کے مساوی نہیں ہے
اگر (۱۱) میں π کو 2 میں تبدیل کیا جائے تو سلسلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک رجم ط} = \text{لوک } 2 + \text{رجم } 2 \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 4 \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ رجم } 6 \text{ ط} - \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر $\pi \neq \pm$ کے درمیان واقع ہو۔
پھر π کو $\frac{1}{4}$ میں تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک رجم ط} = \text{لوک } 2 - \text{رجم } 2 \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 4 \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ رجم } 6 \text{ ط} - \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر π صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (۱۳) سے غیر متکسر کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اسوجہ سے
کہ یہ سلسلہ لا انتہا سمت رفتار سے مستحق ہوتا ہے جبکہ ط قیمت π
کے قریب آتا ہے، جب $\pi = 0$ تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے

لیکن جب طہ ۲۱ سے خواہ کتنی ہی صغیر مقدار کے کم ہو اس سلسلہ کا مجموعہ $\frac{1}{4}$ طہ ہوتا ہے۔

گرگوری کا سلسلہ

۲۵۱۔ چونکہ لوک نو (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ جہاں طہ ± ۲۱ کے درمیان واقع ہے اس لئے

لوک نو جم طہ + لوک نو (۱ + خ مس طہ) = خ طہ
یا لوک نو جم طہ + خ (مس طہ - $\frac{1}{4}$ مس^۲ طہ + $\frac{1}{8}$ مس^۳ طہ - ...)
+ ($\frac{1}{4}$ مس^۲ طہ - $\frac{1}{4}$ مس^۳ طہ + ...) = خ طہ
بشرطیکہ مس طہ ± ۱ کے درمیان واقع ہو جو ہوگا اگر طہ ± ۲۱ کے درمیان واقع ہو یا $\pm \frac{1}{4}$ کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم طہ مثبت ہے نہیں حاصل ہوتا ہے

لوک نو جم طہ = - $\frac{1}{4}$ مس^۲ طہ + $\frac{1}{4}$ مس^۳ طہ - ...
اور طہ = مس طہ - $\frac{1}{4}$ مس^۲ طہ + $\frac{1}{8}$ مس^۳ طہ - ... (۱۴)
اس آخری سلسلے کو گرگوری کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ درست رہتا ہے اگر طہ $\pm \frac{1}{4}$ کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب طہ کو $\frac{1}{4}$ - طہ میں بدلنے سے

$$\frac{1}{4} - طہ = مم طہ - \frac{1}{4} مم^۲ طہ + \frac{1}{8} مم^۳ طہ - \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر طہ $\frac{1}{n}$ اور $\frac{3}{n}$ کے درمیان واقع ہو۔
کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملے ہیں

$$\text{طہ} = n\pi + \text{مس طہ} - \frac{1}{n}\text{مس}^2\text{طہ} + \dots$$

$$\text{یا } \text{طہ} = (n + \frac{1}{n})\pi - \text{مم طہ} + \frac{1}{n}\text{مم}^2\text{طہ} - \dots$$

جہاں سلسلہ اول میں n ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ $-n\pi$ ،

$\pm \frac{1}{n}\pi$ کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں n ایک

صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ $-n\pi$ اور $\frac{1}{n}\pi$ کے درمیان واقع

ہے۔ گرگوری کے سلسلے کو شکل

$$\text{مس}^2\text{لا} = \text{لا} - \frac{1}{n}\text{لا}^3 + \frac{1}{5}\text{لا}^5 - \dots$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں $\text{لا}^2 \pm 1$ کے درمیان واقع ہے اور
 $\text{مس}^2\text{لا}$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب لا^2 کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں حاصل
کیا جا چکا ہے اسکو گرگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جاسکتا ہے فرض کرو
طہ = جب لا^2 تو

$$\dots - \frac{\text{لا}^5}{\frac{5}{2}(\text{لا}^2 - 1)} + \frac{1}{2} + \frac{\text{لا}^3}{\frac{3}{2}(\text{لا}^2 - 1)} - \frac{\text{لا}}{\frac{1}{2}(\text{لا}^2 - 1)} = \text{جب}^2\text{لا}$$

$$\dots + \frac{\text{لا}^7}{\frac{7}{2}(\text{لا}^2 - 1)} - \frac{1}{2} + \frac{\text{لا}^5}{\frac{5}{2}(\text{لا}^2 - 1)} - \frac{1}{2} + \dots$$

اگر لا ایک سے کم ہو تو وہ سلسلہ جو

$$\frac{1}{1+r^2} \cdot \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے مطلقاً مستحق ہے اور سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots$$

مستحق ہے اگر $|r| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ اسلئے ہم اس سلسلہ کو لا کی قوتوں میں

ترتیب دیکھتے ہیں۔ چنانچہ $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$ کے سر کے لئے جملہ ملتا ہے

$$\left\{ \frac{1 \times \dots \times (1-r^2)(1+r^2)}{r^2 \times \dots \times r^2} (1-r^2) + \dots + \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{r^2 \times r^2} + \frac{1+r^2}{r^2} - 1 \right\} \frac{1}{1+r^2}$$

خطوط و صافی { } کے اندر کا جملہ $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$ کے پھیلاؤ (ما کی قوتوں میں)

میں پہلے $r+1$ سرور کا مجموعہ ہے اور یہ مجموعہ $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$ یا

$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$ میں $r+1$ کے سر کے مساوی ہے اور یہ سر

$$\frac{1 \times \dots \times (3-r^2)(1-r^2)}{r^2 \times \dots \times r^2} (1-r^2)$$

کے مساوی ہے۔ پس جب لا کے پھیلاؤ میں لا $r+1$ کا سر ہے

$$\frac{(1-r^2) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1}{r^2 \times \dots \times r^2} \frac{1}{1+r^2}$$

$$\dots + \frac{1+r^2}{1+r^2} \frac{(1-r^2) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1}{r^2 \times \dots \times r^2} + \dots + \frac{1}{5} \frac{r^2}{r^2 \times r^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{r^2} + \dots$$

اسلئے

جب لا = لا +

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ $\pm \frac{1}{11}$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ مجموعہ اسکے استفادہ کے دائرہ میں مسلسل ہے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا ± 1 کے درمیان ہو۔

دائرہ کی تربیع

۲۵۱ (۱)۔ وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the circle) کرینکا ہے یعنی ایک مربع بنائیکا جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اس مسئلہ کے مماثل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دئے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقہ عمل جو اس مسئلہ عملی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدسی ہے جس میں صرف دائروں اور خطوط مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصول موضوعہ کی بموجب پھینچنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ عملی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ وہ ایک خط مستقیم کو جسکا طول عدد π سے تعبیر ہوتا ہے بنائیکا مسئلہ ہے جبکہ ایک دئے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی متصور ہو۔ لیڈبرٹ نے

یہ بات ثابت کی کہ عدد π غیر منطوق ہے یعنی اسکو شکل $\frac{p}{q}$ میں بیان نہیں

کیا جاسکتا جہاں p اور q صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفر د ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کرنے کے لئے کافی نہیں ہے کہ طول π کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطوق طول کے خطوط مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدسی طریقہ عمل سے حاصل کیجا سکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی

اضافہ ہوا جبکہ لیویل (Liouville) نے علوی اعداد کے وجود کو ثابت کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری اعداد وہ ہوتے ہیں جو کسی درجہ ن کی ایک جبری مساوات کی ایک اصل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات کے سرمنطق عدد ہوں، جس کی عمومی صورت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان سرمنطق پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہونے کی قید عائد کی جائے۔ علوی عدد وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سرمنطق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیویل نے علوی عددوں کی مثالیں دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم التحلیل میں بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد فو کی تھی جس کی علویت ہرماٹ (Hermite) نے قائم کی۔ ہرماٹ کے بعد ندی میا لیندمان (Lindemann) نے اس امر کا ثبوت دیا کہ π ایک علوی عدد ہے۔ اس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر $\alpha =$ ما تو یہ دو عدد لا اور ما دونوں جبری نہیں ہو سکتے الا بصورت آنکہ لا = ما = ۱۔ وہ آسان ثبوت کہ لا اور π علوی عدد ہیں بعد میں ہیرٹز (Hurwitz) اور گارڈن (Gordan) نے دئے۔ گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔ یہ ثبوت کہ π ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ جہیں صرف خطوط مستقیم اور دائرے استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری تخمینوں کے ذریعہ ایسا کرنا ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ π کو کسی خاص

Liouville's journal vol. xvi. 1851

Mathematische Annalen, vol. xx. 1882.

" " vol. xliii, 1893

۱۰

۱۱

۱۲

ابتدائی مساوات کو گ سے ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک صمیح عدد اور عدداً ایک سے چھوٹے عدد کا مجموعہ صفر کے مساوی حاصل ہوتا ہے جو ناممکن ہے۔ گ کی تعین کے لئے جملہ

$$\text{فہ (لا)} = \frac{\text{لا}^{\text{پ-۱}}}{\text{پ-۱}} \{ (۱-لا) (۲-لا) \dots (ن-لا) \}$$

پر غور کرو جہاں پ، ن سے بڑا اور ۱ سے بڑا ایک مفرد عدد ہے۔ ہم فہ (لا) کو اسے لا کی قوتوں میں پھیلانے کے بعد ج^{۱-لا} پ^{۱-۱}

+ ج^{۱-لا} پ^{۱-۱} + ... + ج^{ن-لا} پ^{ن-۱} سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب فہ (لا) کے متواتر مشتق تفاعلوں کو

فہ (لا) ، فہ (لا) ، ... ، فہ (لا) ، ... ، فہ (ن-لا) ، فہ (ن-لا) سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

فہ (پ) ، فہ (پ+۱) ، ... ، فہ (ن-پ+۱) ، فہ (ن-پ+۱) ، ...

سب کے سب پ کے ضعیف ہیں، لیکن فہ (پ-۱) ، فہ (پ-۱) ، پ کا ضعیف

نہیں ہے کیونکہ (ن-پ) پ کے لحاظ سے مفرد ہے۔ نیز اگر صمیح عددوں ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے ایک م سے تعبیر ہو تو

ہم دیکھتے ہیں کہ فہ (م) ، فہ (م) ، ... ، فہ (م) ، فہ (م) سب

معدوم ہوتے ہیں اور فہ (پ) ، فہ (پ+۱) ، ... ، فہ (ن-پ+۱) ، فہ (ن-پ+۱) سب

پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں۔
 فرض کرو کہ ک پ سے

$$\text{حک} = \text{ن پ} + \text{پ} - ۱ - \text{ا ل} \times \text{ج ر}$$

$$\text{یا } \text{ن پ} - ۱ - (۰) + \text{ن پ} - ۱ - (۰) + \dots + \text{ن پ} + \text{پ} - ۱ - (۰)$$

تعبیر ہوتا ہے، اس طرح ک پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ ن پ - ۱ - (۰) پ

سے تقسیم پذیر نہیں ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ ک پ کی وہ قیمت جو مفرد
 عدد پ کی کافی طور پر پڑی قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد

ک ہے۔ چونکہ ل پ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے ک پ ل پ کا
 ضعف نہیں ہے۔

میں ماضل ہوتا ہے

$$\text{ک پ ل م} = \text{ل م} \times \text{حک} = \text{ن پ} + \text{پ} - ۱ - \text{ا ل} \times \text{ج ر}$$

$$\text{ل م} = \text{ن پ} + \text{پ} - ۱ - \text{ا ل} \times \text{ج ر} = \text{ا ج} \{ \text{م} + \text{ر} - ۱ \} + \text{م} + \text{ر} - ۱ - \dots + \text{ل}$$

$$\left\{ \dots + \frac{\text{م} + \text{ر}}{(۲ + \text{ر})(۱ + \text{ر})} + \frac{۱ + \text{ر}}{۱ + \text{ر}} + \dots \right\}$$

(308) اب چونکہ $\frac{\text{م} + \text{ر}}{(۲ + \text{ر})(۱ + \text{ر})} + \frac{۱ + \text{ر}}{۱ + \text{ر}}$ کا انتہائی مجموعہ

$$\left\{ \dots + \frac{\text{م}}{\text{ر}} + \text{م} + ۱ \right\}$$

$$\frac{n-1}{1-p} \{ (n+1)(n+2) \dots (n+n) \} \{ 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} \}$$

$$+ \dots + \{ 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} \}$$

ایک سے کم ہے۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1})$

$(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1})$ تین عددوں کا مجموعہ ہے جنہیں سے ایک ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے اور یہ ناممکن ہے۔ پس چونکہ نو مساوات

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} = 0$$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر منطبق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔
۲۵۱ (ج) اگر π بقض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سر منطبق ہیں تو خ π بھی ایسی مساوات کی اصل ہوگا۔ ان کو کہ خ π مساوات

$$ج (1 - p)(1 - p^2) \dots (1 - p^{n-1}) = 0$$

کی ایک اصل ہے جسکے سر منطبق ہیں اس طرح عددوں $1 - p, 1 - p^2, \dots, 1 - p^{n-1}$ میں سے ایک عدد خ π ہے۔

$$چونکہ نو $\pi = 1 - p^1, 1 - p^2, \dots, 1 - p^{n-1}$ اس لئے$$

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}) = 0$$

(309)

جہاں Δ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔
یہ ظاہر ہے کہ ج ع^1 ج ع^2 ج ع^3 ... ج ع^n کے تمام متشکل تفاعل
صحیح عدد ہیں اسلئے ج ب^1 ج ب^2 ج ب^3 ... ج ب^n کے تمام متشکل تفاعل بھی صحیح عدد ہیں۔ ہم لیتے

$$\text{فہ (لا)} = \frac{\text{لا}^1 - \text{پ}^1}{\text{پ}^1 - \text{ا}^1} \text{ج} \left\{ \text{لا}^1 - \text{ب}^1, \text{لا}^2 - \text{ب}^2, \dots, \text{لا}^n - \text{ب}^n \right\}$$

جہاں پ ایک مفرد عدد ہے جو Δ 'ن' ج 'ج' 'ب' بہرہ ... بہرہ
سب سے بڑا ہے۔

$$\text{اب فہ (لا) کو ج}^1 - \text{لا}^1 + \text{ج}^2 - \text{لا}^2 + \dots + \text{ج}^n - \text{لا}^n + \text{پ}^1 - \text{ا}^1$$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ فہ پ^1 (.) فہ پ^2 (.) فہ پ^3 (.) ... فہ پ^n (.)

سب کے سب پ کے صحیح عددی ضعیف ہیں اور فہ پ^1 (.) پ کا
ضعیف نہیں ہے۔ نیز اگر $m \geq n$ تو فہ ب^m (.) فہ ب^n (.) ... فہ ب^1 (.)

سب کے سب صفر ہیں اور $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ فہ پ^m (.) فہ پ^n (.) ... فہ پ^1 (.)

... $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ فہ پ^m (.) فہ پ^n (.) ... فہ پ^1 (.) سب کے سب صحیح عدد ہیں

جو پ سے تقسیم پذیر ہیں۔
فرض کر دو کہ

$$\text{ک}^1 = \frac{\text{لا}^1 - \text{پ}^1}{\text{پ}^1 - \text{ا}^1} \text{ج} \left\{ \text{لا}^1 - \text{ب}^1, \text{لا}^2 - \text{ب}^2, \dots, \text{لا}^n - \text{ب}^n \right\}$$

اس طرح کے 'ا' پ کا ضیف نہیں ہے۔

$$\text{نیز کے } \sum_{r=1}^{n-p} \frac{1}{r} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p} \right\} \text{ ج } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p}$$

$$\left\{ \dots + \frac{1}{(2+1)(1+1)} + \dots \right\}$$

$$= \text{نہ (ہم)} + \text{نہ (ہم)} + \dots + \text{نہ (ہم)} + \text{نہ (ہم)}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-p} \frac{1}{r} \text{ ج } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p}$$

جہاں اعداد اطر سب کے سب صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔

$$\left| \sum_{r=1}^{n-p} \frac{1}{r} \text{ ج } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p} \right|$$

$$\sum_{r=1}^{n-p} \frac{1}{r} > \text{عدا}$$

$$\left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p} \right\} > \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-p} \right\}$$

جہاں یہ 'عدو'ں |ہم|، |ہم|، |ہم|، |ہم| میں سے سب سے بڑا ہے۔

اب ہم پ کو اتنا بڑا لیتے ہیں کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اب} + \text{اب} + \dots + \text{اب} \\ \text{پ} + \text{پ} + \dots + \text{پ} \end{array} \right\} \frac{\text{پ} - \text{پ}}{\text{پ} - \text{پ}} \left\{ \begin{array}{l} \text{پ} + \text{پ} + \dots + \text{پ} \\ \text{پ} + \text{پ} + \dots + \text{پ} \end{array} \right\}$$

فرض کر دو کہ پ کی اس قیمت کے جواب میں ک پ کی قیمت ک ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ک (۱ + ق + ق + ... + ق) تین عددوں مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جنہیں سے ایک 'پ کا ضعف ہے، دوسرا ایک صحیح عدد ہے پ سے ناقصیم پذیر، اور تیسرا ایک عدد ہے ایک سے کم، اس لئے یہ ناممکن ہے کہ مجموعہ معدوم ہو سکے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ π کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر صیح عدد ہوں اور اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

(310)

دائرہ کی تقریبی تربیع

۲۵۲ - دائرہ کی تربیع کا مسئلہ جو π کی قیمت متعین کرنیکے مائل ہے تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک حل ہو سکتا ہے اگر ان متقدد سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ میں رقموں کی کافی تعداد لیجائے جو π کے لئے حاصل کئے جا چکے ہیں۔ سادہ ترین سلسلہ جو حاصل ہو سکتا ہے گرگیوری کے سلسلہ میں ط = ۱/۴ π رکھنے سے ملتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

لیکن یہ سلسلہ استدرکست رفتار سے مستحق ہوتا ہے کہ π کو محض کر نیکی کے لئے اسکا کوئی اعلیٰ فائدہ نہیں۔

۲۵۳۔ اگر ہم تہائے $\frac{1}{n} = \pi$ سن $\frac{1}{4} + \pi$ سن $\frac{1}{5}$ استعمال کریں اور سن $\frac{1}{4}$ سن $\frac{1}{5}$ کی بجائے ان کی قیمتیں گریگوری کے سلسلہ سے لیکر درج کریں تو

$$\dots + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\dots + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} +$$

اس کو یور کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اسی تہائے سے ایک دوسرا سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر سن $\frac{1}{4}$ اور سن $\frac{1}{5}$ کی بجائے ان کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں حاصل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{4}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{4} \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{2}{4} = \pi$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{10}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{2}{10} = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left(\frac{1}{10}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{3}{10} +$$

۲۵۴۔ دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں نے استعمال کئے ہیں۔ کلاسن (Clausen) نے اپنا سلسلہ تہائے $\frac{1}{n} = \pi$ سن $\frac{1}{4}$ سن $\frac{1}{5}$ سے گریگوری کا سلسلہ استعمال کر کے حاصل کیا میخن (Machin) کا سلسلہ ضابطہ

$$\frac{1}{239} = \pi - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ ڈیس (Dase) نے متبادل

$$\frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$$

استعمال کی۔ مینن کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل رتھرفورڈ (Rutherford)

$$\frac{1}{99} = \pi - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$$

استعمال کی۔ ہٹن (Hutton) نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \frac{1}{10} \cdot \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 254 = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{100} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 56 +$$

دیا جو لاسس لاکو $\frac{2}{100}$ کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں

لا = $\frac{1}{3}$ اور لا = $\frac{1}{2}$ رکھنے اور کلاس کی متبادل استعمال کرنے سے حاصل

ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{28}{10} = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left(\frac{144}{100000} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left(\frac{144}{100000} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{30336}{100000} +$$

دیا ہے جو تماشلا

$$\pi = 20 \text{ مس } \frac{1}{2} + 8 \text{ مس } \frac{1}{4}$$

سے اخذ ہو سکتا ہے۔

ڈبلیو شہانکس (W. Shanks) نے π کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰۰ مقامات تک محسوب کی ہے۔

لارڈ براونکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} - \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

یہ کسر معیونی قاعدے سے گرگوری کے سلسلہ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔ سٹرن (Stern) نے مسلسل کسر

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

دی ہے۔

دائرہ کی ترسیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلو پیڈیا

بریتانیکا اشاعت نہم میں مقالہ "Squaring of the circle" میں ملیگا۔

نیز دیکھو کلاسیک مقالہ On the quadrature of the circle 1680-1683۔

میتھماتیکس جلد سوم میں۔

مثلثی تماثلات

۲۵۵۔ دفعہ ۱۹۰ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ مقدار
'ا' 'ب' 'ج' کی کسی تعداد کے درمیان کسی تماشلی جبری رشتہ
ف ('ا' 'ب' 'ج') = سے دو متناظر مثلثی تماثلات اخذ ہو سکتے ہیں

(312)

یہ اس طرح حاصل ہونگی کہ 'ا' ب 'ج' کو ملے قیمتیں
 جم + عہ + خ جب عہ بجم بہ + خ جب بہ بجم جہ + خ جب جہ
 دیکھائیں اور محصلہ تسمائیکہ کو مثلث
 ذ (عہ بہ 'جہ') + خ بہ (عہ بہ 'جہ') =
 میں تحویل کیا جائے تو مثلثی تسمائیات
 ذ (عہ بہ 'جہ') = 'پہ' (عہ بہ 'جہ') =
 حاصل ہونگی جنہیں عہ بہ 'جہ' کی جیوب اور جیوب التمام شامل ہونگی۔
 تحویل کا کام بالعموم مختصر ہو سکتا ہے اگر جم + عہ + خ جب عہ
 جم بہ + خ جب بہ کی بجائے رفری شکلیں جو عہ خ بہ خ جہ
 استعمال کی جائیں۔

مثال

$$\text{مثالہ } 1 = \frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(لا-ا)(لا-ب)} + \frac{(لا-ج)(لا-ا)}{(لا-ب)(لا-ج)} + \frac{(لا-ا)(لا-ب)}{(لا-ج)(لا-ا)}$$

سے مثالہ ذیل اخذ کرو

$$\frac{\text{جب (ط-ب) جب (ط-ج) جب (ط-عہ) جب (ط-بہ)}}{\text{جب (عہ-ب) جب (جہ-ب) جب (عہ-ج) جب (جہ-ج)}} + \frac{\text{جب (ط-ب) جب (ط-عہ) جب (ط-بہ) جب (ط-جہ)}}{\text{جب (عہ-ب) جب (جہ-ب) جب (عہ-ج) جب (جہ-ج)}}$$

$$+ \frac{\text{جب (ط-عہ) جب (ط-بہ) جب (ط-جہ) جب (ط-ب) جب (ط-جہ)}}{\text{جب (عہ-ب) جب (جہ-ب) جب (عہ-ج) جب (جہ-ج)}}$$

فرض کرو لا = فو خط ۱، فو خط ۲ = فو خط ۳، فو خط ۴ = فو خط ۵

$$\frac{\{ \text{لا-ب} \} \{ \text{لا-ج} \} \{ \text{لا-ا} \}}{\{ \text{لا-ب} \} \{ \text{لا-ج} \} \{ \text{لا-ا} \}} = \frac{\{ \text{لا-ب} \} \{ \text{لا-ج} \} \{ \text{لا-ا} \}}{\{ \text{لا-ب} \} \{ \text{لا-ج} \} \{ \text{لا-ا} \}} \times$$

یا = $\frac{\text{جب (ط - ہ) جب (ط - جب)}}{\text{جب (ع - ی) جب (ع - جب)}}$ {جم ۲ (ط - ع) + خر جب ۲ (ط - ع)}
 پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستقیم کرنے اور خر کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے
 ثابت شدنی متاثرہ حاصل ہوتی ہے۔

سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶۔ جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

$$۱ + \text{جم ع} + ۱ + \text{جم لا} + \text{جم (ع + ط)} + ۱ + \text{جم لا} + \text{جم (ع + ط + ۲ ط)} + \dots$$

$$۱ + \text{جب ع} + ۱ + \text{لا جب (ع + ط)} + ۱ + \text{لا جب (ع + ط + ۲ ط)} + \dots$$

کے مجموعے میں ۱ اور میں ۱ اخذ ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو ف (لا) = } ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

تو $\text{خ ع ف (لا ف ط)} = \text{م} + \text{خ م م}$

اور نیز $\text{خ ع ف (لا ف ط)} = \text{م} - \text{خ م م}$

اسلئے $\text{م} = \frac{۱}{۲} \{ \text{خ ع ف (لا ف ط)} + \text{خ ع ف (لا ف ط)} \}$

اور $\text{م} = \frac{۱}{۲} \{ \text{خ ع ف (لا ف ط)} - \text{خ ع ف (لا ف ط)} \}$

اس طرح سے، اور سے، کی جو قیمتیں حاصل ہوں ان کو اب حقیقی شکل میں تحويل کیا جاسکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جمع کرد سلسلہ

$$\text{جم} + \text{ع} + \text{لاجم} + (\text{ع} + \text{ب}) + \text{لاجم} + (\text{ع} + \text{ب}) + \dots + \text{لاجم} + (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ن} - ۱) + \text{ب}$$

$$\text{اب} \quad \frac{۱ - \text{لا}}{۱ - \text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \text{لا} + \dots + \text{لا} + \text{لا}^{ن-۱}$$

اسیں لاکو لا فو ب میں تبدیل کرو اور فو سے ضرب دو تو

$$\text{فو} \quad \frac{\text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو}}{\text{لا فو} - ۱} = \text{لا فو} + \text{لا فو} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + \dots + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ن} - ۱) + \text{ب}$$

$$\dots + \text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ن} - ۱) + \text{ب}$$

اور اسی طرح

$$\text{فو} \quad \frac{\text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو}}{\text{لا فو} - ۱} = \text{لا فو} + \text{لا فو} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + \dots + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ن} - ۱) + \text{ب}$$

$$\dots + \text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو} + (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ن} - ۱) + \text{ب}$$

اسے دے ہوں سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \frac{\text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو}}{\text{لا فو} - ۱} + \frac{\text{لا فو}^{ن-۱} + \text{لا فو}^{ن-۲} + \dots + \text{لا فو} + \text{لا فو}}{\text{لا فو} - ۱} \right\} \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\text{خو}^2 (1 - \text{لا} \text{خو}^2) (1 - \text{لا} \text{خو}^2) + \text{خو}^2 (1 - \text{لا} \text{خو}^2) (1 - \text{لا} \text{خو}^2)}{(1 - \text{لا} \text{خو}^2) (1 - \text{لا} \text{خو}^2)}$$

$$\text{جو} = \frac{\text{جم} - \text{لاجم} - (\text{ع} - \text{ب}) - \text{لا} \text{جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \text{لا}^2 \text{جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب})}{\text{جم} - \text{لاجم} - (\text{ع} - \text{ب}) - \text{لا} \text{جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \text{لا}^2 \text{جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب})}$$

$$1 - 2 \text{لاجم} - \text{لا}^2$$

(۲) جمع کرو لا متناہی سلسلہ

$$\frac{\text{لا} \text{جب} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب})}{\text{ن}} + \dots + \frac{\text{لا} \text{جب} (\text{ع} + 2 - \text{ب})}{2} + \text{جب} \text{ع} + \text{لا} \text{جب} (\text{ع} + \text{ب})$$

$$\text{اب} \quad \text{فو} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \dots$$

اسیں لا کی بجائے لا فو رکھو اور فو سے ضرب دو تو

$$\text{لا} \text{فو}^2 + \text{خو}^2 \text{فو} + \text{لا} \text{فو}^2 + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots + \frac{\text{لا}^2 \text{فو}^2}{2} + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{فو}^2}{\text{ن}} + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots$$

اور اسی طرح

$$\text{لا} \text{فو}^2 + \text{خو}^2 \text{فو} + \text{لا} \text{فو}^2 + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots + \frac{\text{لا}^2 \text{فو}^2}{2} + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{فو}^2}{\text{ن}} + \text{خو}^2 \text{فو} + \dots$$

پس دے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \text{لا} \text{فو}^2 + \text{خو}^2 \text{فو} - \text{لا} \text{فو}^2 - \text{خو}^2 \text{فو} \right\} \frac{1}{2}$$

(814)

$$\frac{1}{2} \text{لاجم} = \left\{ \text{فو} (\text{لاجم} + \text{ع}) - \text{فو} (\text{لاجم} + \text{ع}) \right\}$$

$$\text{جو} = \text{فو} \text{لاجم} = \text{جب} (\text{ع} + \text{لاجم} - \text{ب})$$

اسلئے بائیں جانب کے ہر لوکار تم کو پھیلا نے سے دفعہ ۲۵۰ کا ضابطہ (۹) مائل ہوتا ہے۔

(۳) فو^۱ جب (ب + لا + ج) کو پھیلا نے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں جملہ

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{لا} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{لا} \end{array} \right\}$$

اب اگر ہم فو^۱ (۱ + خر ب) لا، (۱ - خر ب) لا کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو لا^۱ کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\text{ن}} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{ن} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{ن} \end{array} \right\}$$

فرض کرو کہ $\frac{ب}{ا} = \text{مس ع}$ تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\text{ن}} (۱ + ب) \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{ن} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{ن} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\text{ن}} (۱ + ب) \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{ن} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{ن} \end{array} \right\}$$

پس یہ جملہ مطلوبہ پھیلاؤ میں لا^۱ کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + ع) تو لا کو ن کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں $ن > ۱$ ۔

$$\text{چونکہ } \text{فو}^۱ - \text{فو}^۲ = \text{ن} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{ن} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{ن} \end{array} \right\}$$

$$\text{فو}^۱ - \text{فو}^۲ = ۱ - \text{ن} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (۱ + \text{خر} ب) - \text{ن} - \text{فو} \times \text{خرج} (۱ - \text{خر} ب) - \text{ن} \end{array} \right\}$$

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{خلا}^2 = \frac{1-n}{1-n} \text{قوت}^2}{1-n} = \frac{1-n}{1-n} \text{قوت}^2$$

لو کار تم لینے اور بائیں جانب کو پھیلانے سے

$$2 \times (\text{لا} + \text{ک}^2) = (1-n) \text{قوت}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\text{قوت}^2 - \text{قوت}^2 \times 2) + \dots$$

$$\text{پس لا} + \text{ک}^2 = 1-n \text{ جب } 1-n + \frac{1}{4} n \text{ جب } 2-n + \frac{1}{16} n \text{ جب } 3-n + \dots$$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ۱ سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو $\frac{1}{2}$ کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب } 1-n = \frac{1}{2} \text{ جب } (1-n) \text{ جب } (1-n)$$

$$\text{اسلئے } 1-n = \frac{1}{2} \text{ جب } 1-n + \frac{1}{4} \text{ جب } 2-n + \frac{1}{16} \text{ جب } 3-n + \dots$$

کیونکہ اس صورت میں ک = ۰۔

پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1-n}{1-n} \text{ بی}$ کے پھیلاؤ میں جبکہ اسکو کی قوتوں میں

پھیلا یا جائے عام رقم ہے

$$\frac{(1-n) \text{ جب } 1-n + \text{بی جب } 1-n}{\text{جب } 1-n}$$

اور $\frac{1+بی}{(۱-۲ی جم ذہ + ۲)}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم ہے

$$\frac{(۳+ن) جب (ن+۱) ذہ - (ن+۱) جب (ن+۳) ذہ}{۴ جب ۳ ذہ}$$

$$+ \frac{(۲+ن) جب ن ذہ - ن جب (ن+۲) ذہ}{۴ جب ۳ ذہ}$$

(یولر)

(316)

۲۔ اگر مس لا = $\frac{ن جب ع}{ن-۱ جم ع}$ تو ثابت کرو کہ

$$لا = ن جب ع + \frac{۱}{۴} ن جب ۲ ع + \frac{۱}{۱۶} ن جب ۳ ع + \dots$$

جیکہ ن ایک سے کم ہے۔

۳۔ اگر نم ما = نم لا + قم ع قم لا تو ثابت کرو کہ

$$ما = جب لا جب ع - \frac{۱}{۴} جب ۲ لا جب ع + \frac{۱}{۱۶} جب ۳ لا جب ع - \dots$$

۴۔ اگر مس $\frac{۱}{۴} ط = \left(\frac{۱+۱}{۱-۱} \right) \frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴} ذہ$ تو ثابت کرو کہ

$$ط = ذہ + ۲ لا جب ذہ + \frac{۲}{۴} لا جب ۲ ذہ + \frac{۲}{۳} لا جب ۳ ذہ + \dots$$

جہاں $ل = \frac{۱}{۴} + \left(\frac{۱}{۴} \right) ۲ + \left(\frac{۱}{۴} \right) ۳ + \left(\frac{۱}{۴} \right) ۵ + \dots$

۵۔ اگر مس ط = لا + مس ع تو ثابت کرو کہ

$$ط = ع + لا جم ع - \frac{۱}{۴} لا جم ۲ ع جب ۲ ع - \frac{۱}{۴} لا جم ۳ ع جم ۳ ع$$

$$+ \frac{۱}{۱۶} لا جم ۴ ع جب ۴ ع + \dots$$

۶۔ اگر $(+۱) م$ مس ط = $(-۱) م$ مس فہ جبکہ ط اور فہ مثبت
عاده زاوے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ط = فہ - م جب ۲ فہ + \frac{1}{۲} م جب ۴ فہ - \frac{1}{۳} م جب ۶ فہ + \dots$$

۷۔ اگر مس ع = جم ۲ سے مس لہ تو ثابت کرو کہ
لہ = ع = مس لہ جب ۲ ع + \frac{1}{۲} مس لہ جب ۴ ع + \frac{1}{۳} مس لہ جب ۶ ع + \dots

۸۔ اگر جب لا = ن جم (لا + ع) تو لا کون کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۹۔ ثابت کرو کہ $(۱-۲) لا جم ط + لا$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

۲ { $\frac{1}{۲} جم پ ط + \frac{1}{۲} پ - ۱ جم (پ-۲) ط + \frac{1}{۲} پ - ۲ جم (پ-۳) ط + \dots$ }
جہاں 'م' (۱-لا) کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے۔

$$۱۰۔ ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2+n} = ۱۸ = \frac{۲}{۱۱}$$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$لوک ج = لوک ۱ - \frac{۲}{۳} جم ج - \frac{۲}{۳} جم ج - \frac{۲}{۳} جم ج - \dots$$

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب، و سے کم ہے۔

۱۲۔ اگر مساوات $۱ لا + ب لا + ج =$ کی اصلیں خیالی ہوں تو

ثابت کرو کہ $(۱ لا + ب لا + ج)$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

$$\frac{\frac{۱}{۲} ن جب (۱+ن) ط}{ج \frac{1}{۲} ن + ۱ جب ط}$$

جہاں طہ سادات ب قط طہ + ۲۱ ارج ۲۰ سے حاصل ہوا ہے۔

۱۳۔ اگر پ = $\frac{(1+n) \text{ جم طہ} + (1-n) \text{ جب طہ}}{(1+n) \text{ جم طہ} + (1-n) \text{ جب طہ}}$ تو لوک و پ کو طہ جفت فیضوں کی جیوب اتمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۱۴۔ لوک و جم (طہ + $\frac{1}{\pi}$) کو طہ کے فیضوں کی جیوب اور جیوب $\frac{1}{\pi}$ کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(317) ۱۵۔ ثابت کر دو کہ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{21} + \frac{1}{322 \times 81} + \dots + \frac{(1-n)}{1-n^2} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right\} + \dots + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} \right\} + \dots$

۱۶۔ ثابت کر دو کہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{\pi (1 + \sqrt{2})}{8}$

۱۷۔ $(1 - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ کی سب قسمتیں معلوم کر دو۔

۱۸۔ ثابت کر دو کہ $(1 + \sqrt{2})^n$ مس (فہ) لوک و (قط فہ)۔ فہ ۲۔ ایک حقیقی عدد ہے اور اسکی قیمت معلوم کر دو۔

۱۹۔ اگر و جم طہ + ب جب طہ = ج جہاں ج < $\sqrt{1 + \frac{1}{2}}$ تو $\frac{1}{\pi}$ کو

طہ = $(1+n) \frac{1}{\pi} + \text{خ لوک و}$ ج + $\frac{1}{\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$ - مس ۱۔ $\frac{1}{\pi}$

۲۰۔ لا + ۱ کے اس جملہ سے جو اجزائے ضربی میں ہے یہ اخذ کر دو کہ جب ن

جفت ہوتو

$$\begin{aligned} & \text{مسٲا جب ۱ طہ} = \text{مسٲا} \frac{\text{جب ۲ طہ} - \text{جم ۲ جم}}{\text{جم ۲ طہ}} + \text{جم ۲ طہ} \\ & + \text{مسٲا} \frac{\text{جب ۲ طہ} - \text{جم ۲ جم}}{\text{جم ۲ طہ}} + \text{جم ۲ طہ} \\ & + \text{مسٲا} \frac{\text{جب ۲ طہ} - \text{جم ۲ جم}}{\text{جم ۲ طہ}} + \text{جم ۲ طہ} \dots \end{aligned}$$

$$۲۱ - \text{تمثالہ} \frac{۱}{۱-۱} - \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱-۱} - \frac{۱}{۱-۱} \text{ سے اخذ کرو}$$

جم (طہ + عہ) جب (طہ - یہ) - جم (طہ + یہ) جب (طہ - عہ) = جب (عہ - یہ) جم ۲ طہ
جب (طہ + عہ) جب (طہ - یہ) - جب (طہ + یہ) جب (طہ - عہ) = جب (عہ - یہ) جب ۲ طہ
۲۲ - ثابت کرو کہ

$$\text{مسٲا عہ} = \frac{\text{مسٲا بے}}{\text{بے}} + \frac{\text{مسٲا اچہ}}{\text{اچہ}} = \frac{\text{لوک}}{\frac{۳۶+۲}{۳۶-۲}} = \frac{۳۶}{۳۶-۲} (۱ - \frac{۱}{۲})$$

$$+ \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵} + \dots$$

جہاں عہ، بے، اچہ اکائی کے تین چند الکعب ہیں۔

۲۳ - اساس ۱ + ب + خ + ج + د + ع کے لوکارتموں کو شکل ۱ + ب + خ میں بیان کرو۔

۲۴ - اگر مسٲا (۱/۲ + ۱/۳) = مسٲا (۱/۴ + ۱/۵) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مسٲا} \frac{۱}{۲} = \text{مسٲا} \frac{۱}{۳}$$

۲۵ - کسی شلث میں ثابت کرو کہ

$$\text{جم ۱ ب} + \text{جم ۲ ب} = \text{جم ۱ ج} - \text{جم ۲ ج} - \text{جم ۱ د} - \text{جم ۲ د}$$

$$+ \frac{\text{جم ۱ د} - \text{جم ۲ د}}{۲} - \text{جم ۱ ب} - \text{جم ۲ ب} - \dots$$

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۶۔ اگر $\text{لوک لوک لوک} (ع + خ ب) = م + خ ق$

تو $\text{توت جم ق جم} (ف جب ق) = \frac{۲}{۴} \text{لوک} (ع + ب ۲)$

اور $\text{توت جب ق} \times \text{جب} (ف جب ق) = \text{مس تا}$

۲۷۔ اگر $\text{توت جم لاکو لاکو لاکو} (معودی توتوں میں بھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ)$ (318)

لاک کاسر $\frac{۱}{۲} \text{جم} \frac{۱}{۳} \text{ن}$ ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{(۱ + \text{توت جم ط})} = \frac{۱}{۲} \text{قط} ۲ + \dots + \frac{۱}{۲(۱ - ۲)} \text{قط} ۲ \text{سلسلہ} (۱ + \text{جم} ۲) \text{جم} ۲ + \dots$

جہاں ۲ ل، جب ۱ فو کی کم سے کم مثبت قیمت ہے۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$\frac{۱}{(۱ + ۲) \dots ۵ \times ۳ \times ۱} - \frac{۱}{(۳ + ۲) \dots ۴ \times ۵ \times ۳} + \dots$ تک

کو شکل $\frac{۱}{۲} \text{ب} + \frac{۱}{۳} \text{ب}$ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں $\frac{۱}{۲} \text{ب}$ جم

صحیح عدد ہیں اور

$\frac{۱}{۲ - ۲} = \frac{۱}{۲} \text{جم} = \frac{۱}{۲} \text{ب} = \frac{۱}{۲} \text{ب} (۱ - ۲) = \frac{۱}{۲} \text{ب} (۱ - ۲) \dots ۵ \times ۳ \times ۱ (۱ - ۲)$

۳۰۔ ثابت کرو کہ

جب $\text{ط جم} \text{ن ف} = \text{جب} \text{ف جم} \text{ن ط} + \text{جب} \text{ف جم} \text{ن} (۱ - ۱) \text{ط جب} (ط - ف)$

۳۶ - کسی مثلث میں اگر $\angle C$ توثابت کر دو کہ

$$\frac{\text{جم } ۱}{ب} = \frac{۱}{ج} \left\{ ۱ + \frac{۱}{ج} \text{ جم } ۲ + \frac{ن(۱+ن)}{۲} \frac{۱}{ج} \text{ جم } ۳ \right\}$$

$$\left\{ \dots + \frac{ن(۱+ن)(۲+ن)}{۳} \frac{۱}{ج} \text{ جم } ۳ + \dots \right\}$$

(319)

۳۷ - ثنابت کر دو کہ

$$(\text{مس } ۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{(۱-۲)^{۱-۲}}{۲} \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{۱}{۱-۲} \right) + \dots$$

جہاں ۱ ± ۱ کے درمیان واقع ہے۔

$$۳۸ - \text{اگر } ۶ = \text{لوک } ۱ \text{ مس } \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \right) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots$$

$$\text{توثابت کر دو کہ } ۱ = ۶ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$۳۹ - \text{مس } \left\{ \text{خرج } ۱ \text{ لوک } ۱ - \frac{۱}{۲} \right\} \left\{ \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۲} + \dots \right\}$$

۴۰ - ثنابت کر دو کہ

$$\frac{\text{جم } ۱}{(۱-ن)} + \frac{\text{جم } ۲}{(۲-ن)} + \dots + \frac{\text{جم } ۲}{(۲+ن)} + \frac{\text{جم } ۱}{(۱+ن)}$$

$$= \frac{۱}{(۱+ن)^۲} - \frac{(۱+ن)^{۱-۲}}{(۲+ن)^۲}$$

۴۱ - اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

مس = ۱ + ن جم ط + ... + $\frac{[1+n-1][1+n-2]}{[1-1][1-2]}$ جم ط جم (۱-ر) ط + ...
تو ثابت کرد که

۲ من جب ط = {۱+ (۱-)} {۱- (۱-)} جم ط + {۱- (۱-)} {۱- (۱-)} جم ط + ... + {۱- (۱-)} {۱- (۱-)} جم ط

۲۲ - ثابت کرد که مس مس ... مس لا (ن ماسون تک) کلاچیلاد

$$لا + ۲ن \frac{لا}{۳} + ۴ن (۱-۵) \frac{لا}{۵} + \frac{لا}{۵} \frac{۸}{۳} (۵-۱۷-۲۸-۱۱) \frac{لا}{۳} + ...$$

۲۳ - اگر مس (۱/۳ - ع - ف) = مس ۳ ۱/۳ ع تو ثابت کرد که

$$ف = \frac{۱}{۳ \times ۱} \text{ جب ع} - \frac{۱}{۳ \times ۲} \text{ جب ۲ ع} + \frac{۱}{۳ \times ۳} \text{ جب ۳ ع} - ...$$

۲۴ - اگر مس ط > ۱ تو ثابت کرد که

$$\text{مس ط} - \frac{۱}{۳} \text{ مس ط} + \frac{۱}{۳} \text{ مس ط} - ... = \text{جب ط} + \frac{۱}{۳} \text{ جب ط} + \frac{۱}{۳} \text{ جب ط} + ...$$

۲۵ - ثابت کرد که

$$+ \frac{ن (۱-۵) (۱-۲) (۲-۳) (۳-۴) (۴-۵)}{۱} + \frac{ن (۱-۴) (۱-۳) (۳-۲) (۲-۱) (۱-۵)}{۱} + ...$$

$$= \frac{۱}{۳} \{ ۲ + (۱-۲) \times ۲ \times \frac{۲}{۳} \}$$

۲۶ - ثابت کرد که مساواتیں

لا جب ۲ ع + ما جب ۲ بی + ی جب ۲ ج - ۲ ما ی جب (ب + ج) - ۲ ی لا جب (ج + ع)

- ۲ لا ما جب (ع + ب) = ۰

لا جم ۲ ع + ما جم ۲ بی + ی جم ۲ ج - ۲ ما ی جم (ب + ج) - ۲ ی لا جم (ج + ع)

- ۲ لا ما جم (ع + ب) = ۰

حسب ذیل قیمتوں کے چٹوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

لا : ما : ی = جب $\frac{۱}{۳}$ (یہ - جی) : جب $\frac{۱}{۲}$ (جی - ع) : جب $\frac{۱}{۲}$ (ع - بی) :

یا = جب $\frac{۱}{۳}$ (یہ - جی) : جم $\frac{۱}{۲}$ (جی - ع) : جم $\frac{۱}{۲}$ (ع - بی) :

یا = جم $\frac{۱}{۲}$ (یہ - جی) : جب $\frac{۱}{۲}$ (جی - ع) : جم $\frac{۱}{۲}$ (ع - بی) :

یا = جم $\frac{۱}{۲}$ (یہ - جی) : جم $\frac{۱}{۲}$ (جی - ع) : جب $\frac{۱}{۲}$ (ع - بی) :

۴۷ - اگر طہ کی مختلف قیمتیں طہ ۱، طہ ۲، طہ ۳، طہ ۴ ہوں جو مساوی

۱ جم ۲ طہ + ۲ جب ۲ طہ + ج جم ۲ طہ + د جب ۲ طہ + ع =

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{جم س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب س}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم (س طہ)}} = \frac{\text{د}}{\text{جب (د س طہ)}} = \frac{\text{ع}}{\text{جم (طہ ۱ طہ ۲ طہ ۳ طہ ۴)}} \\ \text{جہاں } ۲ \text{ س} = \text{طہ ۱} + \text{طہ ۲} + \text{طہ ۳} + \text{طہ ۴}$$

۴۸ - ثابت کرو کہ

(۱-۱) $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{۱}{۲}$ = ۱ - ن ق ط ط جم طہ + $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲}$ ق ط ط جم ۲ طہ ... (ن جفت)

(۱-۱) $\frac{۱}{۲}$ (ن-۱) مس $\frac{۱}{۲}$ ن ق ط ط جب طہ - $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲}$ ق ط ط جب ۲ طہ ... (ن طاق)

۴۹ - اگر جب ۱ لا = ۱ لا + لا ۲ + لا ۳ ... تو ثابت کرو کہ سلسلہ

لا ۱ + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + لا ۵ + ...

کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ {جم ۱} (ما ۱ + لا ۲ + لا ۳ - لا ۴) + جب ۱ لا ہے۔

۵۰ - اگر مساوات لا ۱ + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + ... + بن = ۱ کی کن ملیں

عہ ۱، ۲، ۳، ۴ ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{سن } ۱ = \frac{\text{جیب ط}}{\text{جیب ط} - \text{لا}} + \text{سن } ۱ = \frac{\text{جیب ط}}{\text{جیب ط} - \text{لا}} + \dots$$

$$\text{سن } ۱ = \frac{\text{جیب ط} \times \text{لا} + \text{جیب ط} \times \text{لا} + \dots + \text{جیب ن ط}}{\text{لا} + \text{جیب ط} \times \text{لا} + \text{جیب ط} \times \text{لا} + \dots + \text{جیب ن ط}}$$

۵۱ - اگر (۱-ج) مس ط = (۱+ج) مس ذ تو سلسلوں

$$\text{جیب ط} - \frac{1}{4} \text{جیب ط} + \frac{1}{4} \text{جیب ط} - \frac{1}{4} \text{جیب ط} + \dots$$

$$\text{جیب ط} + \frac{1}{4} \text{جیب ط} - \frac{1}{4} \text{جیب ط} + \frac{1}{4} \text{جیب ط} - \dots$$

میں سے ہر ایک ط - ذ کے مساوی ہے جہاں ط اور ذ ایک ساتھ
معدوم ہوتے ہیں اور ج > ۱ -

۵۲ - ثابت کرو کہ

$$\text{جیب } \frac{1}{2} + \text{جیب } \frac{1}{4} + \text{جیب } \frac{1}{8} + \dots + \text{جیب } \frac{1}{\infty} = \text{ک}$$

۵۳ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{جیب } \frac{1}{2} + \text{جیب } \frac{1}{4} + \text{جیب } \frac{1}{8} + \dots + \text{جیب } \frac{1}{\infty} = \text{ک}$$

سب ذیل قیمتیں اختیار کرتا ہے

$$(۱) \text{ جب } \left(\text{جیب } \frac{1}{4} - \text{جیب } \frac{1}{8} \right) \text{ جبکہ } \pi < \text{لا} < \pi$$

$$(۲) \text{ جب } \left(\text{جیب } \frac{1}{4} + \text{جیب } \frac{1}{8} \right) \text{ جبکہ } \pi < \text{لا} < \pi$$

$$۵۴ - \text{اگر ج} = \text{جیب ط} - \frac{1}{4} \text{جیب ط} + \frac{1}{4} \text{جیب ط} - \frac{1}{4} \text{جیب ط} + \dots$$

تو ثابت کرو کہ سن ۲ ج = ۲ مم ط

۵۵ - ثابت کرو کہ

$$\text{جیب } \frac{1}{2} + \text{جیب } \frac{1}{4} + \text{جیب } \frac{1}{8} + \dots + \text{جیب } \frac{1}{\infty} = \text{ک}$$

اگر یہ = $\pi \setminus \pi$ -

۵۶ - ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ط \times \text{جب } ط - \frac{1}{4} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط + \frac{1}{16} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط - \dots$$

$$= \text{جم } (1 + \text{مم } ط + \text{مم } ط^2)$$

(321)

۵۷ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک (قم } ط) = 2 \times (\text{جم } ط - \frac{1}{4} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط + \frac{1}{16} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط - \dots)$$

۵۸ - ثابت کرو کہ

$$\text{جم } (1 - ط) = ط \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^{n-1}} \right\} \\ \left\{ \dots + \dots \right\}$$

۵۹ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \text{ جم } ط - \frac{5}{16} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \dots \text{ کا مجموعہ جم } \frac{1}{2} \text{ ط}$$

ہے جہاں ط $\pm \pi$ کے درمیان واقع ہے۔

اسلذیل کے لامتناہی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

$$۶۰. \text{جم } ط - \frac{1}{4} \text{ جم } ط + \frac{1}{16} \text{ جم } ط - \frac{1}{64} \text{ جم } ط + \dots$$

$$۶۱. 1 - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط - \frac{1}{8} \text{ جم } ط + \dots$$

$$۶۲. \text{جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط - \frac{1}{16} \text{ جم } ط + \frac{1}{64} \text{ جم } ط - \dots$$

$$۶۳. \text{جم } ط \times \text{جم } ط + \text{جم } ط \times \text{جم } ط + \text{جم } ط \times \text{جم } ط + \dots$$

$$+ \frac{1}{16} \text{ جم } ط \times \text{جم } ط + \dots$$

$$۶۴- \text{جب ط} - \frac{۱}{۵} \text{جب ۳ ط} + \frac{۱}{۵} \text{جب ۵ ط} - \dots$$

$$۶۵- \frac{\text{جم ط}}{۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{\text{جم ۲ ط}}{۴ \times ۳ \times ۲} + \frac{\text{جم ۳ ط}}{۵ \times ۴ \times ۳} - \dots$$

$$۶۶- \text{جم ع} + \frac{\text{جم (ع+۲)}}{۳} + \frac{\text{جم (ع+۴)}}{۵} - \dots$$

$$۶۷- \text{جم ط جم ذ} - \frac{۱}{۴} \text{جم ۲ ط جم ۲ ذ} + \frac{۱}{۳} \text{جم ۳ ط جم ۳ ذ} - \dots$$

$$۶۸- \text{مس ع جب ۲ لا} + \frac{\text{مس ع جب ۳ لا}}{۲} + \frac{\text{مس ع جب ۴ لا}}{۳} - \dots$$

$$۶۹- ۱ + \frac{\text{جم ط}}{۲} + \frac{\text{جم (۲ جب ط)}}{۲} + \frac{\text{جم (۳ جب ط)}}{۳} - \dots$$

$$۷۰- \text{جب ط} \times \text{جب ط} - \frac{۱}{۴} \text{جب ۲ ط} \times \text{جب ۲ ط} + \frac{۱}{۳} \text{جب ۳ ط} - \dots$$

$$۷۱- \text{م جب ع} - \frac{۱}{۲} \text{م جب ۲ ع} + \frac{۱}{۳} \text{م جب ۳ ع} - \dots$$

$$۲ > ۱ -$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{قطر}^۲ + \text{منز}^۲ = ۱$$

$$(۳) \dots\dots\dots \text{منز}^۲ + \text{قمر}^۲ = ۱$$

یہ رشتے دائری تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتوں

$$\text{جم}^۲ + \text{جب}^۲ = ۱, \text{قط}^۲ - \text{مس}^۲ = ۱, \text{قم}^۲ - \text{مم}^۲ = ۱$$

کے جواب میں ہیں اور انہیں ط = خء رکھنے سے فوراً اخذ ہوتے ہیں رشتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اور زائدی تفاعلوں کی تعریفوں کی مدد سے کسی بھی زائدی تفاعل کو کسی دوسرے زائدی تفاعل کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نتائج حسب ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔

(328)

جزء = لا	جزء = لا	منز = لا	منز = لا	قطر = لا	قمر = لا
لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$
$\sqrt{1 + \frac{1}{\text{لا}}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$
$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{لا}}}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$
$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$
$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$
لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}}}}$

جمع کے ضابطے

۲۶۰۔ چونکہ جمر (±۶) = جم خ (±۶) = جم خ و جم خ و ± جب خ و جب خ و پس جمر (±۶) = جمر و جمر و ± جمر و جمر و (۴) اسی طرح جمر (±۶) = جمر و جمر و ± جمر و جمر و (۵) یہ زائدی جیب التام اور جیب کے لئے جمع کے ضابطے ہیں، بلاشبہ انکی تصدیق ان تقاضوں کی قوت نامائمتوں کو درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔ (۴) اور (۵) سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\text{مسر} (\pm 6) = \frac{\text{مسر} \pm \text{مسر و}}{\pm \text{مسر و مسر و}} \dots\dots\dots (۶)$$

$$\text{ممر} (\pm 6) = \frac{\text{ممر و ممر و} \pm ۱}{\text{ممر و} \pm \text{ممر و}} \dots\dots\dots (۷)$$

۲۶۱۔ چونکہ جمر (±۶) + جمر (±۶) = ۲ جمر و جمر و

جمر (±۶) - جمر (±۶) = ۲ جمر و جمر و

جمر (±۶) + جمر (±۶) = ۲ جمر و جمر و

جمر (±۶) - جمر (±۶) = ۲ جمر و جمر و

اور

اسلئے، و کو علی الترتیب $\frac{۱}{۲} (\pm 6)$ ، $\frac{۱}{۲} (\pm 6)$ میں بدلنے سے (324)

حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جمر و} + \text{جمر و} = ۲ \text{ جمر و} \frac{۱}{۲} (\pm 6) + \frac{۱}{۲} (\pm 6) \\ \text{جمر و} - \text{جمر و} = ۲ \text{ جمر و} \frac{۱}{۲} (\pm 6) - \frac{۱}{۲} (\pm 6) \\ \text{جمر و} + \text{جمر و} = ۲ \text{ جمر و} \frac{۱}{۲} (\pm 6) + \frac{۱}{۲} (\pm 6) \\ \text{جمر و} - \text{جمر و} = ۲ \text{ جمر و} \frac{۱}{۲} (\pm 6) - \frac{۱}{۲} (\pm 6) \end{array} \right. \dots\dots (۸)$$

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب الٹام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کے لیے ہیں۔

ضعفوں یا تحت ضعفوں کیلئے ضابطے

۲۶۲۔ دائری تفاعلوں کے ضابطوں کے جواب میں ضعفوں یا تحت ضعفوں کے زائدی تفاعلوں کے درمیان مماثل رشتے، ضابطوں (۴) (۵) (۶) اور (۸) سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جزء } ۶۲ = ۲ \text{ جزء } ۶ - \text{جزء } ۶$$

$$\text{جزء } ۶۲ = \text{جزء } ۶ + \text{جزء } ۶ = ۱ - ۱ = ۱ + ۲ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{مسز } ۶۲ = \frac{۲ \text{ مسز } ۶}{۱ + \text{مسز } ۶} \text{، جزء } ۶۳ = ۳ \text{ جزء } ۶ + ۴ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{جزء } ۶۳ = ۴ \text{ جزء } ۶ - ۳ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{مسز } ۶۳ = \frac{۳ \text{ مسز } ۶ + \text{مسز } ۶}{۱ + ۳ \text{ مسز } ۶} \text{، جزء } ۶۴ = \frac{۱ + \text{جزء } ۶}{۲}$$

$$\text{جزء } ۶۴ = \left[\frac{۱ - \text{جزء } ۶}{۲} \right] \text{ مسز } ۶ = \left[\frac{۱ - \text{جزء } ۶}{۱ + \text{جزء } ۶} \right] = \frac{\text{جزء } ۶}{۱ + \text{جزء } ۶}$$

زائدی تفاعلوں کے لئے سلسلے

۲۶۳۔ چونکہ $\text{قو} = \text{جزء } ۶ + \text{جزء } ۶$ ، $\text{قو} = \text{جزء } ۶ - \text{جزء } ۶$ اس لئے جزء ۶، جزء ۶ کے لئے سلسلے ۶ کی قوتوں میں یہ ہیں

$$\text{مسز } ۶ = ۱ + \frac{۶}{۱} + \frac{۶}{۲} + \dots + \frac{۶}{۳} + \frac{۶}{۴} + \dots$$

وقفہ ۲۳۳ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ جزء ۶ = ۱ + ب، جزء ۶ = ۶ + ۳

جہاں

اب | $\frac{1}{2}$ | اء^۱ | فو^۱ | ، اس | $\frac{1}{4}$ | اء^۳ | فو^۱ |

(325)

نیز (جزء ± جزء) کی عدد قیمت ہمیشہ ہے

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تقاضوں کے لئے ڈیپوائٹر کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

$$\text{مجموع} = \frac{1}{4} \{ (\text{مجزء} + \text{جزء}) + (\text{مجزء} - \text{جزء}) \}$$

$$\{ \text{جزء} + \text{جزء} - (\text{جزء} - \text{جزء}) \} \frac{1}{4} = 6 \text{ جزء}$$

۲۶۴۔ ان آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جذر } m = m \text{ جذر } 1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3} \text{ جذر } 2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4} \text{ جذر } 3 + \dots$$

$$\text{جذر } 1 = \text{جذر } 1 + \frac{\text{جذر } 1 - \text{جذر } 2}{2} + \frac{\text{جذر } 1 - \text{جذر } 2 - \text{جذر } 3}{2} + \frac{\text{جذر } 1 - \text{جذر } 2 - \text{جذر } 3 - \text{جذر } 4}{2}$$

... + جزع ...

دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جہز م ع، جہز م ع کے پھیلاؤ، جہز ع کی قوتوں میں حاصل کئے جاسکتے ہیں؛ لیکن مختلف سردوں کو اکٹھا کر نیکے کام کو دہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۴ جو دہریوں باب سے ضابطہ میں طہ کی بجائے خ ع درج کر کے نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$جزم م = م جزم + \frac{م(١-٢)م}{٣} + \frac{م(٢-٣)م}{٥} + \dots$$

$$\text{جزء } \epsilon = +\frac{\mu}{n} + \text{جزء } \epsilon + \frac{\mu}{n}(\frac{n-1}{n})^2 + \text{جزء } \epsilon + \dots$$

۱۔ اگر جبراً ہے۔ اگر جبراً ہے تو

$$(FV+1)k = 6$$

۲۶۵۔ جزم ۶ کے سلسلہ سے ۶ کے لئے ایک سلسلہ جبر ۶ کی قوتوں میں ماخوذ ہوتا ہے جیسا کہ دائری تفاعلوں کی صورت میں طہ کیلئے اخذ کیا گیا تھا۔ چنانچہ م کی پہلی قوتوں کو مسادی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\dots + \text{جبر} \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 2 \times 1} - \text{جبر} \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 1} + \text{جبر} \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} - \text{جبر} = 6$$

یہ سلسلہ مستحق ہے اگر چیز ≥ 1 یا اگر \geq نوک $(+1) - (27)$ ۔
بالخصوص

$$\dots + \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 3 \times 1}{1 \times 3 \times 5} - \frac{1}{5} \times \frac{3 \times 1}{1 \times 3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} - 1 = (17 + 1) \text{ لک}$$

زامدی تفاعلوں کی دوریت

۲۶۶۔ تفاعلات جمرہ، منبر، خیالی دور ۲۲ خ رکھتے ہیں کیونکہ
 ۶ = ۲۲ + ۶

پس

جزء ۶ = حجم (۶ + ۲۰ خ ۱۱ ک)

جزء ۶ = جز (۶ + ۲۸) (ک)

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ چونکہ $2^{2n+4} - 2^{2n+2} = 2^{2n+2}(2^2 - 1) = 2^{2n+2} \cdot 3$ تو

اس لئے

جزء (ع + ح + ط) = - جزء

جیز (ع + خ) = جیزو

اس لئے $\text{منہر} (ع + خ \pi) = \text{منہر}$
یا منہر کا دور π ہے جو جزء، جزء کے دور کا صرف نصف ہے۔ دلیلوں: $\frac{1}{2} \pi$ ، π ، $\frac{3}{2} \pi$ ، 2π کے جواب میں
جزء، جزء، منہر کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

	$\frac{1}{2} \pi$	π	$\frac{3}{2} \pi$	2π
جزء	۰	خ	۰	خ -
جزء	۱	۰	۱ -	۰
منہر	۰	خ $\times \infty$	۰	خ $\times \infty$
منہر	∞	۰	∞	۰
قطر	۱	∞	۱ -	∞
قطر	∞	خ -	∞	خ

جس طرح دائری تفاعل حقیقی دور کے سادہ ترین ایک دوری تفاعل ہیں
عین اسی طرح زائدی تفاعل خیالی دور کے سادہ ترین ایک دوری تفاعل
ہیں۔

قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ

۲۶۷۔ فرض کرو کہ نیم قاطع محور ۱ اور مرکز ۰ کے ایک قائم الزاویہ زائد
پر کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ ق کا معین ق ل ہے تب
قائم الزاویہ زائد کی خاصیت کی رو سے ول - ق ل = ل' اب اگر ہم
فرض کریں ول = ل' جزء تول ق = ل' جزء جہاں ہم ل' کو مثبت
یا منفی لیتے ہیں بموجب اس کے کہ معین ل ق مثبت یا منفی طور پر ناپا
گیا ہو۔ اب ہم رقبہ اق پر غور کرتے ہیں جو ول، ول' اور منحنی کی
توس اق سے محدود ہے۔ دائری قطاع کی صورت کے مطابق جو دفعہ ۱
میں زیر بحث آچکی ہے ہم توس اق میں ایک کھلا مستقیم الامسلاع

ان قیمتوں سے اور جب طرہ ۱۰، جم طرہ ۱۰ کی متناظر قیمتوں سے ہیں معلوم ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب (طه} + 1 - \text{طه} - 1)}{\frac{1}{4}(\text{جب} + 1 - \text{جب} - 1)} = \text{جب (طه} + 1 - \text{طه} - 1)$$

اب و پ = ۱ (جنم۲ عمر + جنم۲ عمر) = ۱ جنم۲ عمر

اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

اس لئے $\Delta O P R = \Delta O P R$ (طریقہ - طریقہ)

$$= \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5})$$

پس اُس مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ جو اول 'وق' اور

اپ اپ پ ق کے ضلعوں سے محدود ہے یہ ہے

$$\sum_{r=0}^{n-1} x^r = \frac{1}{x} (x^n - 1) = \frac{1}{x} (x - 1) \sum_{r=0}^{n-1} (x + 1 - x)^r$$

جہاں ع. = ک. عن = ع۔

(328)

یہ ناپ دفعہ ۲۶۳ میں ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے

$$\left\{ x^{j-1} + x^j (x-1) + (x-1)^2 \right\}^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p}$$

کے مساوی ہے جہاں اعداد اور سب کے سب $\frac{1}{p}$ سے کم ہیں۔

ضلع پیر پور کا طول ہے

$$\{ (جمنر عر + جمنر عر) + (جمنر عر + جمنر عر) \}$$

جو $۱۲ = ۱۲$ جنز (عر + عر + ۱) جنز $\frac{۱}{۲}$ (عر + ۱ - عر)
نیز $۱۲ - ۱ - عر > جنز (عر + ۱ - عر)$ اسلئے نسبت (عر + ۱ - عر) / (پ + ۱)

> ۱۲ جنز $\frac{۱}{۲}$ (عر + ۱ - عر) / جنز (عر + ۱ - عر) > ۱۲ جنز $\frac{۱}{۲}$ ع
اب چونکہ (عر + ۱ - عر) / (پ + ۱) ایک مستقل عدد سے جو ر پر او کسی مخصوص
کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں
کے کسی تواتر کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں عر + ۱ - عر میں سے
بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا
بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستقیم ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض
کر سکتے ہیں

عر + ۱ - عر $> ک$
ر کی تمام قیمتوں کے لئے، جہاں $ک$ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے
جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پر بڑھا دیکائی ہے۔
اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناب

$$\frac{۱}{۲} (۱۲ - ۱ - عر)$$

یا
سے استقدر کم فرق لکھا ہے جو

$$\frac{۱}{۱۲} (۱۲ - ۱ - عر)$$

یا
 $\frac{۱}{۱۲} (۱۲ - ۱ - عر)$

سے کم ہے اور یہ $ک$ کے ساتھ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔ پس

بیہ ثابت ہو چکا کہ مقدمہ شرط کے تحت کسی تواثر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے ناپ کی یکسانیت ہوا $\frac{1}{2} \times \text{اے} \times \text{بے}$ ہے۔ اسلئے قطاع و اقی کا رقبہ جو $\frac{1}{2} \times \text{اے} \times \text{بے}$ وقی اور قائم الزاویہ زاویہ کی قوس اقی سے محدود ہے $\frac{1}{2} \times \text{اے} \times \text{بے}$ ہے۔ کسی قطاع کا رقبہ جسکے سرے اے سے تعبیر ہوتے ہیں سرکچا $\frac{1}{2} \times \text{اے} \times \text{بے}$ ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر ملے نقطوں کو تعبیر کریں $\text{اے کو خ} - \pi$ میں بدلنا چاہئے کیونکہ

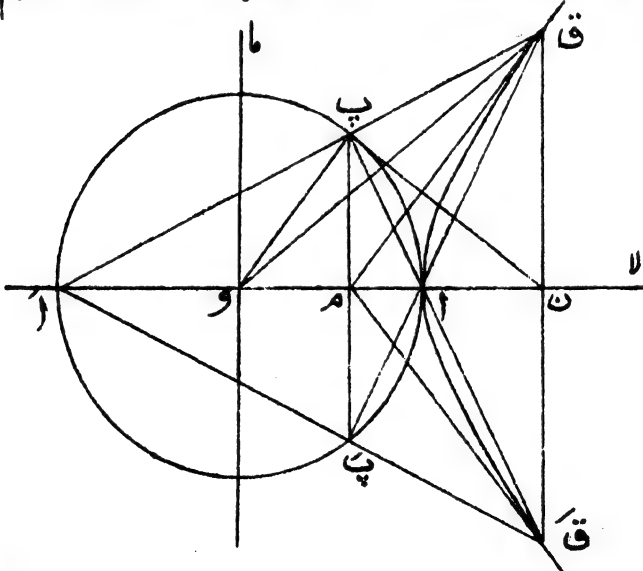
$$\text{جزر} (\pi - \text{اے}) = - \text{جزر} \text{اے}$$

اور $\text{جزر} (\pi - \text{اے}) = - \text{جزر} \text{اے}$ اگر ہم نصف نظر و ا = ا کا ایک دائرہ کھینچیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ لیں جسکا مقیم م پ ہو تو زاویہ پ و ا کو ط سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رتبہ و ا پ} = \frac{1}{2} \times \text{اے} \times \text{بے}$$

فرض کرو کہ پ پر کا ماس پ ن ہے تب

$$\text{و م} = \text{اے} \times \text{بے} = \text{اے} \times \text{بے} = \text{اے} \times \text{بے} = \text{اے} \times \text{بے}$$



ن سے ن ق، واپر عمود اور ن پ کے مساوی کھینچو تب و ن
 - ن ق = و، اس لئے ق کا طریق نیم محور کا ایک قائم الزاویہ
 قطع زائد ہے۔ اب قطع و ا ق کے رقبہ کو $\frac{1}{2}$ وء سے تعبیر کرو
 تو حسب ثبوت دفعہ سابق و ن = و جزء، ن ق = و جزء۔
 پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پر کے کسی نقطہ پ کا ممیّن اور فصل
 علی الترتیب و جب طہ، و جم طہ سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ و طہ
 دائری قطع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پر کے نقطہ ق
 کا ممیّن اور فصل علی الترتیب و جزء، و جزء سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں
 $\frac{1}{2}$ وء قطع و ا ق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب التمام
 قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے
 حوالے سے جیب اور جیب التمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔
 یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے عین ایسے
 ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔
 ۲۶۹۔ دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر
 غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو حاصل ہوتا ہے
 $\frac{1}{2}$ مس طہ = ن ق = و جزء، اور $\frac{1}{2}$ ق طہ = و ن = و جزء،
 اسلئے متناظر نقطوں کی دلیلیں طہ، و، رشتوں مس طہ = جزء، ق طہ
 = جزء کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

(۳۳۰)

$$\frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ طہ}}{\frac{1}{2} \text{ ق طہ}} = \frac{\text{جزء}}{\frac{1}{2} \text{ و}} = \frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ طہ}}{\frac{1}{2} \text{ ق طہ}}$$

$$\frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ طہ}}{\frac{1}{2} \text{ ق طہ}} = \frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ طہ}}{\frac{1}{2} \text{ ق طہ}} = \frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ طہ}}{\frac{1}{2} \text{ ق طہ}}$$

یا دلیلیں طہ اور و، رشتہ مس $\frac{1}{2}$ طہ = مس $\frac{1}{2}$ طہ کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ و ق م > قطع و ا ق > و ا ق

مسرع > ۶ > جزع

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مسرع، جزع کی انتہائیں جبکہ ۶ کو لا انتہا

گھا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ جز = ۱۔

۲۷۰ - جز = نو = جزع + جزع

= قط طہ + مس طہ

اسلئے ۶ = لوک نو (قط طہ + مس طہ)

= لوک مس (۱/۴ + ۱/۴)

دلیل طہ کو مختلف نام دے جا چکے ہیں، چنانچہ کیلے (Cayley) اس کو

۶ کا گودرمنی (Gudermannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ۶ (gd u)

سے تعبیر کرتا ہے، اس طرح طہ = گڈ ۶، ۶ = گڈ طہ = لوک مس (۱/۴ + ۱/۴)۔ یہ نام گڈرمن

(Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ۶ کے

طول بلد (Longitude) سے موسوم کیا تھا لیمبرٹ (Lambert)

نے طہ کو علوی (Transcendent) زادیہ کہا اور ہویل (Houel)

نے ۶ کا زادیہ حیثہ کہا اور لکھا حظ ۶ (amhu)۔ صف درجے سے

۹۰ تک ۱/۴ کے وقفوں سے طہ کی قیمتوں کے لئے لوک مس (۱/۴)

+ ۱/۴ طہ کی قیمتوں کی ایک جدول جس میں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲

مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملیں۔ اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے

دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کیلے نے اخذ کیا تھا۔

(Crelle's journal, 1883.)

(Théorie des fonctions complexes)

(Quarterly journal, vol. xx.p.220)

۱۔ دیکھو

۲۔ دیکھو

۳۔ دیکھو

(381)

اس جدول سے ω کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں
جزء = مس طہ، جزء = قسطہ
کے ذریعہ زاویوں کے طبعی ماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کر کے
معلوم کر سکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور ان کے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی
خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les

Fonctions Hyperboliques" in the Memoires de la Societe
des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات

"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,

"Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten
Hyperbol-funktionen" by Gunther.

ملف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملہ

۲۷۱۔ ملف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم
استعمال کر کے آسانی کے ساتھ شکل $\omega + \chi$ بہ میں بیان کیا جا سکتا ہے
جہاں ω اور χ بہ حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب $(\omega + \chi)$ = جب لاجم χ + جم لاجب χ +
اسلئے جب $(\omega + \chi)$ = جب لاجم χ + جم لاجب χ + ... (۹)
اسی طرح جم $(\omega + \chi)$ = جم لاجم χ - جب لاجب χ + ... (۱۰)
نیز مس $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$. جم $(\omega - \chi)$
جم $(\omega + \chi)$. جم $(\omega - \chi)$

$$\frac{\text{جب } \omega + \text{جب } \chi}{\text{جم } \omega + \text{جم } \chi} =$$

اسلئے مس $(\omega + \chi)$ = جب $\omega + \chi$ جب $\omega + \chi$... (۱۱)
جم $\omega + \chi$ جب $\omega + \chi$

ملف دلیلوں کے مقلوداؤری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل جب (لا + خ ما) پر غور کریں گے۔ فرض کرو
جب (لا + خ ما) = ع + خ بہ ا تب

لا + خ ما = جب (ع + خ بہ) = جب ع جزم بہ + خ جم ع جزم بہ
یا
لا = جب ع جزم بہ ' ما = جم ع جزم بہ
اسلئے یہ کو معلوم کرنیکی مساوات ہے

$$1 = \frac{لا}{جزم\ ۲\ بہ} + \frac{ما}{جزم\ ۲\ بہ}$$

یا
لا (جزم ۲ بہ - ۱) + ما (جزم ۲ بہ - ۱) = جزم ۲ بہ (جزم ۲ بہ - ۱)
(332) اگر ہم جزم ۲ بہ کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

$$جزم\ ۲\ بہ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴ لا}$$

اسلئے جزم بہ = $\frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴ لا}$
اور چونکہ جزم بہ مثبت ہے اسلئے

$$جزم\ ۲\ بہ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴ لا}$$

اگر لا مثبت ہے۔ جزم بہ کی اس قیمت کے جواب میں جب ع کی قیمت

$$لا \text{ جزم بہ } لا \frac{1}{p} \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴ لا}$$

اب چونکہ جزم بہ < ۱ < جب ع اسلئے

$$جزم\ ۲\ بہ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴ لا}$$

جب $e = \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 + \lambda)^2} - \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 - \lambda)^2}$ و
 پس جمنز بہ جب e کی قیمتیں مندرجہ صدر میں خواہ لامشیت ہو یا منفی۔
 دو درجہ جمنز بہ e سے حاصل ہوتا ہے یہ \pm لوک $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$
 اسلئے جب $(\lambda + \chi) = k + (1 - \lambda)$ جب \pm خ لوک $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$
 جہاں k ایک صحیح عدد ہے اور جب \pm و e کی صدر قیمت ہے
 جو اس شرط جب $e =$ و کو پورا کرتی ہے۔ بہم علامت کی تعیین کیلئے
 رکھو $\lambda =$ تو جب $\chi = k + \pi \pm$ خ لوک $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$ اسلئے
 $\chi = \pm$ جم $k + \pi$ جب $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$

$\pm = \frac{1}{\chi} \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{1 + e^2}} - \frac{1}{1 - \sqrt{1 + e^2}} \right\} \pm (1 - \lambda) \chi$
 اسلئے بہم علامت وہی ہونی چاہئے جو $(1 - \lambda)$ کی ہے یا
 جب $(\lambda + \chi) = k + (1 - \lambda)$ جب \pm خ لوک $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$... (۱۲)

جہاں $e = \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 + \lambda)^2} + \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 - \lambda)^2}$
 اور $w = \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 + \lambda)^2} - \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + (1 - \lambda)^2}$
 اگر ہم جب \pm و خ لوک $\{e + \sqrt{e^2 - 1}\}$ کو جب $(\lambda + \chi)$ کی قیمت
 خیال کریں اور اسے جب $(\lambda + \chi)$ سے تغییر کریں تو عام قیمت ہے
 $k + (1 - \lambda)$ جب $(\lambda + \chi)$

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی ذیلیوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔

ایک خاص صورت لا < 'ا' ما = کی ہے اس صورت میں
 $\epsilon = \text{لا}$ ، $\omega = \text{ا}$ اور جب 'لا کی صدر قیمت $\frac{1}{4}\pi + \text{خر لوک} \{ \text{لا} + \text{لا} - \text{ا} \}$
 ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جب 'لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا < ا۔

۳۷۲۔ ثانیاً فرض کرو کہ حجم (لا + خر ما) = $\epsilon + \text{خر ب}$ تو پہلی صورت کی
 طرح حاصل ہوتا ہے

لا = حجم ϵ جمنزبہ، ما = جب ϵ جمنزبہ
 اور حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جمنزبہ} = \frac{1}{4}\sqrt{\text{لا} + \text{ا}} + \frac{1}{4}\sqrt{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{1}{4}\sqrt{\text{ما} + \text{ا}} = \epsilon$$

$$\text{حجم } \epsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\text{لا} + \text{ا}} - \frac{1}{4}\sqrt{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{1}{4}\sqrt{\text{ما} + \text{ا}} = \omega$$

اس لئے حجم (لا + خر ما) = $\pi k \pm \text{حجم } \omega \pm \text{خر لوک} \{ \epsilon + \text{لا} - \text{ا} \}$
 آخری رقم کی علامت کی تعیین کے لئے رکھو لا = ۰ تو

$$\text{خر ما} = \text{حجم} \left[\pi \pm \text{خر لوک} (\text{ما} + \text{ا}) \right] = \pm \text{جب} \{ \text{خر لوک} (\text{ما}) \}$$

$$+ \sqrt{\text{ما} + \text{ا}} = (\pm \text{خر ما})$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم علامت پہلی سے مختلف ہونی چاہئے یا

$$\text{حجم} (\text{لا} + \text{خر ما}) = \pi k \pm \{ \text{حجم } \omega - \text{خر لوک} (\epsilon + \text{لا} - \text{ا}) \} \dots (۱۳)$$

اگر حجم $\omega - \text{خر لوک} (\epsilon + \text{لا} - \text{ا})$ سے حجم (لا + خر ما) کی صدر قیمت

تعبیر ہو تو عام قیمت $\pi k \pm \text{حجم} (\text{لا} + \text{خر ما})$ ہے۔

۲۷۴ — فرض کرو کہ مسن (لا + خ م) = ع + خ م تب

$$\frac{\text{جب ۲ ع + خ جز ۲ م}}{\text{جم ۲ ع + جز ۲ م}} = \text{لا + خ م}$$

اسلئے $\frac{\text{لا}}{\text{جم ۲ ع + جز ۲ م}} = \frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جز ۲ م}}$ م = $\frac{\text{جز ۲ م}}{\text{جم ۲ ع + جز ۲ م}}$

اسلئے $\frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{جم ۲ م + جز ۲ م}} = \frac{\text{جب ۲ ع + جز ۲ م}}{\text{جم ۲ م + جز ۲ م}}$

$$\frac{\text{جز ۲ م - جم ۲ ع}}{\text{جز ۲ م + جم ۲ ع}} =$$

یا $\frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جز ۲ م + جم ۲ ع}} = \frac{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}$

اور $\frac{\text{جز ۲ م}}{\text{جز ۲ م + جم ۲ ع}} = \frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}$

اسلئے مس ۲ ع = $\frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲ - ۱}$ اور مسن ۲ م = $\frac{\text{م}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲ + ۱}$

اب چونکہ $\frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲ + ۱} = \frac{\text{قو}^۲ - \text{قو}^۲}{\text{قو}^۲ + \text{قو}^۲}$

اسلئے $\frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲ + ۱} = \frac{\text{قو}^۲}{\text{قو}^۲ + \text{قو}^۲}$

یا $\frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲ + ۱} = \frac{\text{قو}^۲}{\text{قو}^۲ + \text{قو}^۲}$

اسلئے مسن (لا + خ م) کی قیمتیں

$$\text{مسن}^{\text{ا}} (لا + خنا) = ک + \frac{۱}{۲} \text{مسن}^{\text{ا}} \frac{۱۲}{۲۱ - ۲۱ - ۱}$$

$$+ \frac{۱}{۲} \text{خر لوک} \left\{ \frac{۱(۱+۱) + ۱}{۲(۱-۱) + ۱} \right\} \dots \dots (۱۴)$$

سے ملتی ہیں۔

مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵۔ اگر جنرے = ی تو عہ کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور اسے جنرے^{ای} سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جنرے^{ای} اور مسنرے^{ای} کے لئے ہے۔

(334) اگر ی = جنرے = خ جب خ عہ تو خ ی = جب خ عہ یاع = خ جب خ ی (خ ی) اسی طرح اگر ی = جنرے = جم خ عہ تو عہ = خ جم ی، نیز اگر ی = مسنرے تو عہ = $\frac{۱}{۲}$ مسنرے (خ ی)۔ پس مقلوب زائدی تفاعل مقلوب دائری تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جنرے^{ای} = خ جب خ (خ ی)

جنرے^{ای} = خ جم خ (ی)

مسنرے^{ای} = خ مسنرے (خ ی)

سے بیان ہو گئے ہیں۔

۲۷۶۔ ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے ملتق دلیل کے مقلوب دائری تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلا واسطہ ہی معلوم کرینگے۔

(۱) اگر ی = جنرے تو عہ = تو عہ = ی - اسکو نو کی قیمت

معلوم کر نیکے لئے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و^2 = ی \pm (۱ + ی^2)$$

اس لئے $ع = ۲ \text{ خک} + \pi + لوک (۱ + ی^2)$

یا $ع = ۲ \text{ خک} + \pi + لوک (۱ - ی^2)$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جلد $۲ \text{ خک} + \pi + (۱ - ی^2)$ کی $(۱ + ی^2)$ میں

شامل ہیں۔

پس جبراً ماکی عام قیمت $۲ \text{ خک} + \pi + (۱ - ی^2)$ کی $لوک (۱ + ی^2)$

ہے اور اسکی صدر قیمت $لوک (۱ + ی^2)$ ہے۔ اس صدر قیمت کو بالعموم جبراً ی سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر $ی = \text{جزء} \text{ تو } و^2 = ۲ ی^2$ اسلئے

$$و^2 = ی \pm (۱ - ی^2) \text{ اس طرح } ع = ۲ \text{ خک} \pm \pi + لوک (۱ - ی^2)$$

پس جبراً ی کی عام قیمت $۲ \text{ خک} \pm \pi + لوک (۱ - ی^2)$ ہے اسکی

صدر قیمت جو بالعموم جبراً ی سے تعبیر کی جاتی ہے $لوک (۱ - ی^2)$ ہے

$$(۳) \text{ اگر } ی = \text{مسزء} \text{ تو } و^2 = \frac{۱ - ی^2}{۱ + ی^2} \text{ یا } و^2 = \frac{۱ + ی^2}{۱ - ی^2}$$

اسلئے $ع = ۲ \text{ خک} + \pi + لوک \left(\frac{۱ + ی^2}{۱ - ی^2} \right)$ یہ مسزاً ی کی عام قیمت

ہے اور اسکی صدر قیمت $\frac{۱}{۲} لوک \left(\frac{۱ + ی^2}{۱ - ی^2} \right)$ ہے۔

(۴) اسی طرح منزای، قطزای، قنزای کی صدر قیمتوں کے لئے علی الترتیب حملے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{2} \text{ لوک } \left(\frac{1+1}{1-1} \right) \text{ لوک } \frac{1+1}{1-1} \text{ لوک } \frac{1+1}{1-1} \text{ لوک } \frac{1+1}{1-1}$$

کعبی مساواتوں کا حل

(335)

۲۷۷۔ دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب کعبی لا + ق لا + ر = کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ق منفی ہو تو اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{2}{3} \text{ ق} \times \text{جب ط}} - \sqrt{\frac{2}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط} + \frac{2}{3} \pi)} - \sqrt{\frac{2}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط} + \frac{2}{3} \pi)} - \sqrt{\frac{2}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط} + \frac{2}{3} \pi)}$$

جہاں جب ۳ ط = $\left(-\frac{2}{3} \text{ ق} \right) - \frac{1}{4}$ اب ہم یہ دکھانگے کہ کعبی کو اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں اس صورت میں شرط

$$۲۷۷ + ۲ \text{ ق} < ۰$$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کعبی

۴ جبز ۳ + ۳ جبز ۳ = ۳ جبز ۳
پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ۱ جبز ۳، تب لا اس سادات

$$لا + \frac{3}{4} لا - \frac{1}{4} لا = ۳ جبز ۳ = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔ یہ کعبی، کعبی لا + ق لا + ر = پر منطبق ہوگا اگر

$$ق = \frac{۳}{۴} ر = \frac{۱}{۴} ر - \frac{۲۴}{۳۶۴} = ۳ - ۶۳ = ۲۴۰$$

اب کعبی ۴ جزو ۳ + جزو ۳ = جزو ۶ کی اصلیں ہیں

$$\text{جزو ۶} = \text{جزو ۳} + \text{جزو ۳} = \left(\frac{۲}{۳} \pi x + ۶ \right) + \left(\frac{۲}{۳} \pi x + ۶ \right)$$

اسلئے کعبی لا + ق + لا + ر = کی اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} + \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} + \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} + \sqrt{\frac{۳}{۴} ق}$$

$$\sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} - \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} - \sqrt{\frac{۳}{۴} ق}$$

جہاں جزو ۳ = $\frac{۱}{۴} ر - \frac{۲۴}{۳۶۴}$ - اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں دی گئی ہیں تو عدد ۳ کو زائدی جیوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر انہی جدولوں سے جزو ۳، جزو ۶ معلوم کئے جاتے ہیں۔ پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

$$۴ \text{ جزو ۶} - ۳ \text{ جزو ۳} = ۳ \text{ جزو ۳}$$

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر ق = $-\frac{۳}{۴} ر$ ،

$$ر = \frac{۱}{۴} ر - \frac{۲۴}{۳۶۴} \text{ تو وہ کعبی جو ۶ جزو ۳ سے پورا ہوتا ہے}$$

لا + ق + لا + ر = ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} - \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} = \sqrt{\frac{۳}{۴} ق} - \sqrt{\frac{۳}{۴} ق}$$

$$+ \frac{۲}{۳} \pi x$$

یا $\sqrt{\frac{۳}{۴} ق جزء ۱} - \sqrt{\frac{۱}{۴} ق} (- جزء \pm ۳۱ جزء)$

جہاں جزء ۶۳ = $\frac{۱}{۴} (- ۲۷ \frac{۲}{۳} ق)$ پس حسب صورت سابقہ ہم کمی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرینگے لئے جبکہ ق اور ر دی گئے ہوں زائدی تفاعلوں کی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔

(396)

۲۷۸ — طہ کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ۷ کی قیمتوں کی جدول

طہ	۷ = لوگ مس $(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} ط)$	طہ	۷ = لوگ مس $(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} ط)$	طہ	۷ = لوگ مس $(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} ط)$
۰	۵۰	۱۵	۵۰	۳۰	۵۰
۱	۵۰۱۷۵۳۳	۱۶	۵۰۱۷۵۳۳	۳۱	۵۰۱۷۵۳۳
۲	۵۰۳۴۹۰۶۶	۱۷	۵۰۳۴۹۰۶۶	۳۲	۵۰۳۴۹۰۶۶
۳	۵۰۵۲۳۵۹۹	۱۸	۵۰۵۲۳۵۹۹	۳۳	۵۰۵۲۳۵۹۹
۴	۵۰۶۹۸۱۳۲	۱۹	۵۰۶۹۸۱۳۲	۳۴	۵۰۶۹۸۱۳۲
۵	۵۰۸۷۲۶۶۵	۲۰	۵۰۸۷۲۶۶۵	۳۵	۵۰۸۷۲۶۶۵
۶	۵۱۰۴۷۱۹۸	۲۱	۵۱۰۴۷۱۹۸	۳۶	۵۱۰۴۷۱۹۸
۷	۵۱۲۲۱۷۳۰	۲۲	۵۱۲۲۱۷۳۰	۳۷	۵۱۲۲۱۷۳۰
۸	۵۱۳۹۶۲۶۳	۲۳	۵۱۳۹۶۲۶۳	۳۸	۵۱۳۹۶۲۶۳
۹	۵۱۵۷۰۷۹۶	۲۴	۵۱۵۷۰۷۹۶	۳۹	۵۱۵۷۰۷۹۶
۱۰	۵۱۷۴۵۳۲۹	۲۵	۵۱۷۴۵۳۲۹	۴۰	۵۱۷۴۵۳۲۹
۱۱	۵۱۹۱۹۸۶۲	۲۶	۵۱۹۱۹۸۶۲	۴۱	۵۱۹۱۹۸۶۲
۱۲	۵۲۰۹۴۳۹۵	۲۷	۵۲۰۹۴۳۹۵	۴۲	۵۲۰۹۴۳۹۵
۱۳	۵۲۲۶۸۹۲۸	۲۸	۵۲۲۶۸۹۲۸	۴۳	۵۲۲۶۸۹۲۸
۱۴	۵۲۴۴۳۴۶۱	۲۹	۵۲۴۴۳۴۶۱	۴۴	۵۲۴۴۳۴۶۱

طه	طه	طه	طه		
طه	طه	طه	طه		
۱۵۰۹۳۸۳۳۵	۱۵۹۲۵۰۲۲۵	۵۳	۵۵۴۹۳۰۶۱	۵۵۲۳۵۹۸۸	۳۰
۱۵۱۲۲۱۷۷۲	۱۵۹۲۲۷۷۷۸	۵۴	۵۵۶۹۵۶۲۷	۵۵۲۱۰۵۲۱	۳۱
۱۵۱۵۴۲۳۲۶	۱۵۹۵۰۹۳۱۱	۵۵	۵۵۹۰۰۳۲۹	۵۵۵۸۵۰۵۳	۳۲
۱۵۱۸۵۰۵۰۷	۱۵۹۷۷۳۸۲۳	۵۶	۵۶۱۰۷۷۷۵	۵۵۷۵۹۵۸۷	۳۳
۱۵۲۱۶۶۷۷۸	۱۵۹۴۸۳۷۷۷	۵۷	۵۶۳۱۶۵۸۱	۵۵۹۳۴۱۱۹	۳۴
۱۵۲۴۹۱۶۰۶	۱۵۰۱۲۲۹۱۰	۵۸	۵۶۵۲۸۳۶۶	۵۶۱۰۸۶۵۲	۳۵
۱۵۲۸۲۵۶۶۸	۱۵۰۲۹۷۴۴۳	۵۹	۵۶۷۴۷۷۷۵	۵۶۲۸۳۱۸۵	۳۶
۱۵۳۱۶۹۵۷۹	۱۵۰۴۷۱۹۷۶	۶۰	۵۶۹۵۹۸۸۰	۵۶۴۵۷۷۷۸	۳۷
۱۵۳۵۲۴۰۰۸	۱۵۰۶۴۶۵۰۸	۶۱	۵۷۱۷۷۸۸۰	۵۶۶۳۲۲۵۱	۳۸
۱۵۳۸۸۹۸۶۰	۱۵۰۸۲۱۰۳۱	۶۲	۵۷۴۰۰۲۹۰۱	۵۶۸۰۶۷۸۳	۳۹
۱۵۴۲۶۷۸۸۲	۱۵۰۹۹۵۵۷۴	۶۳	۵۷۶۲۹۰۹۵	۵۶۹۸۱۳۱۷	۴۰
۱۵۴۶۵۹۰۸۳	۱۵۱۱۷۷۰۱۰۷	۶۴	۵۷۸۵۸۶۳۰	۵۷۱۵۵۸۵۰	۴۱
۱۵۵۰۶۴۵۴۲	۱۵۱۳۴۴۶۴۰	۶۵	۵۸۰۹۱۶۷۷	۵۷۳۳۰۳۸۳	۴۲
۱۵۵۴۸۵۴۷۲	۱۵۱۵۱۹۱۷۳	۶۶	۵۸۳۲۸۴۰۶	۵۷۵۰۴۹۱۶	۴۳
۱۵۵۹۲۳۲۳۷	۱۵۱۶۹۳۷۰۶	۶۷	۵۸۵۶۹۰۲۶	۵۷۷۷۹۴۴۹	۴۴
۱۵۶۳۷۹۳۸۷	۱۵۱۸۶۸۴۳۹	۶۸	۵۸۸۱۳۷۳۶	۵۷۹۵۳۹۸۲	۴۵
۱۵۶۸۵۵۶۸۵	۱۵۲۰۴۲۷۷۲	۶۹	۵۹۰۶۲۷۷۵	۵۸۰۲۸۵۱۵	۴۶
۱۵۷۳۵۴۱۵۲	۱۵۲۲۱۷۷۰۵	۷۰	۵۹۳۱۶۳۱۶	۵۸۲۰۳۰۳۷	۴۷
۱۵۷۸۷۷۷۱۲۰	۱۵۲۳۹۱۸۳۸	۷۱	۵۹۵۷۴۶۶۹	۵۸۳۷۷۷۷۸۰	۴۸
۱۵۸۴۲۷۳۰۰	۱۵۲۵۶۶۳۷۱	۷۲	۵۹۸۳۸۰۷۹	۵۸۵۵۲۱۱۳	۴۹
۱۵۹۰۰۷۸۶۷	۱۵۲۷۴۰۹۰۴	۷۳	۵۹۰۰۰۶۸۳۲	۵۸۷۲۶۶۴۶	۵۰
۱۵۹۶۲۶۵۷۲	۱۵۲۹۱۵۴۳۶	۷۴	۵۹۰۳۸۱۲۳۵	۵۸۹۰۱۱۷۹	۵۱
۱۶۰۲۷۷۷۸۹۴	۱۵۳۰۸۹۹۶۹	۷۵	۵۹۰۶۶۱۶۱۷	۵۹۰۷۷۷۱۲	۵۲

ط	ط	ط	ط	ط	ط
۲۵۹۴۸۷۰۰۲	۱۵۴۶۶۰۷۶۶	۸۴	۲۵۰۹۷۳۲۴۰	۱۵۳۶۶۴۵۰۲	۷۶
۳۵۱۳۱۳۰۱۳	۱۵۴۸۲۵۲۹۹	۸۵	۲۵۱۷۲۱۲۱۸	۱۵۳۴۳۹۰۳۵	۷۷
۳۵۳۵۴۶۷۳۵	۱۵۵۰۹۸۳۲	۸۶	۲۵۲۵۲۸۰۲۷	۱۵۳۶۱۳۵۶۸	۷۸
۳۵۶۴۲۵۳۳۴	۱۵۵۱۸۴۳۶۴	۸۷	۲۵۳۴۰۴۰۰۷	۱۵۳۷۸۸۱۰۱	۷۹
۴۵۰۴۸۱۲۵۴	۱۵۵۲۵۸۸۹۷	۸۸	۲۵۴۳۶۲۳۶۰	۱۵۳۹۶۲۶۳۴	۸۰
۴۵۷۴۱۲۴۸۸	۱۵۵۵۳۳۳۳۰	۸۹	۲۵۵۴۲۰۹۰۳	۱۵۴۱۳۷۱۶۷	۸۱
∞	۱۵۵۷۰۷۹۶۳	۹۰	۲۵۶۶۰۳۰۶۱	۱۵۴۳۱۱۷۰۰	۸۲
			۲۵۷۹۴۲۱۹۰	۱۵۴۴۸۶۲۳۳	۸۳

سولہویں باب پر مثالیں

(337)

۱۔ ثابت کرو کہ

۸ جیزن لا جیز^۲ لا = ۲ جیز (ن + ۲) لا - ۴ جیزن لا + ۲ جیز (ن - ۲) لا

۲۔ اگر جم (ع + خ بی) = جم فہ + خ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = ± ج بی ع

= ± ج بی ب

۳۔ اگر جم (طہ + خ فہ) جم (ع + خ بی) = ۱ تو ثابت کرو کہ

منز^۲ فہ جیز^۲ ب = جب ع اور منز^۲ ب جیز^۲ فہ = جب طہ

۴۔ اگر مس ما = مس ع منز^۲ ب مس ی = مم ع منز^۲ ب تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جیز^۲ ب قمر^۲ ع

۵۔ جب (ع + خ بی) کو شکل ۱ + خ ب میں تحویل کرو۔

۶۔ اگر لوک، جب (طہ + خرفہ) = ع + خ بہ

توثابت کرو کہ $۲\text{ جم } ۲\text{ ط } = ۲\text{ حیز } ۲\text{ ف } - ۲\text{ م } ۲\text{ م } ۲$

اور $\text{جم (طہ - یہ)} = \text{فوفہ جم (طہ + ہ)}$

۷۔ اگر ناس (لا + خا) = جب (ع + خو)

توثبات کرد که من و جبر ۱۲ = مم و جب ۲۲

۸- {جم (ط + خذ) + خج (ط - خذ)}^{ط + خ + ج} کو شکل

۱۔ خدایا میں بیان کرو۔

۵۔ ثنابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 = \left(\frac{\text{مس}^2 + \text{مس}^3}{\text{مس}^2 - \text{مس}^3} \right) + \text{مس}^4 = \left(\frac{\text{مس}^2 - \text{مس}^3}{\text{مس}^2 + \text{مس}^3} \right) + \text{مس}^4$$

۱۔ اگر $6 = 3 - 2 + 1 - 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

و = جب ۷ - $\frac{1}{4}$ جب ۳ + $\frac{1}{8}$ جب ۵ ...

ثابت کر کے $\frac{1}{p} \pi \geq e > \frac{1}{p} \pi$ اور $\frac{1}{p} \pi = e$ قطعہ

۱۱۔ ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$\dots + \frac{12^m}{12} + \frac{8^m}{8} + \frac{4^m}{4} + 1$$

۱۲۔ ختمت کرو کہ

$$\frac{\infty = \infty}{(1-)} \quad \text{جب } (1+m^2) \text{ نہ ہو}$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} \{ \text{جم (جم پ ط) جنز (جب پ ط) } \} + \text{جم ع}$$

لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر ف ≥ ۱ ، لیکن مستدق ہوتا ہے اگر ف < ۱ ۔ کیونکہ $\frac{۱}{۲}$ متع ہے جبکہ ف ≥ ۱ اور مستدق ہے جبکہ ف < ۱ ۔

حاصل ضرب $(\frac{۱}{۱} + ۱)(\frac{۱}{۲} + ۱) \dots (\frac{۱}{n} + ۱)$ یقیناً متع ہے

اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ حاصل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر ی کا حقیقی حصہ صفر ہو۔ جب 'ی' کا حقیقی حصہ منفی ہو تو حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔ کیونکہ

لو کہ $(\frac{۱}{n} + ۱) = \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}$ (۱ + ض) جہاں |ض| ان کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک مستقل عدد سے کم ہے، اسلئے $\frac{۱}{n}$ لو کہ $(\frac{۱}{n} + ۱)$ کا حقیقی حصہ - ۱ کی طرف متع ہوتا ہے جبکہ ی کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ یہ ان واقعات پر مبنی ہے کہ $\frac{۱}{n}$ متع ہے اور $\frac{۱}{n} \geq \frac{۱}{۲}$ مستدق۔

(343)

جیب اور جیب التمام کو لا متناہی حاصل ضربوں کے طور پر پریا کرنا

۲۸۲۔ اب ہم وہ جملہ معلوم کریں گے جو جیب اور جیب التمام کو لا متناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ لا ہو۔ ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لیتے۔
اب

$$\text{جب لا} = ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

$$۳ = \frac{۱}{۳} \text{ جب } \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \text{ جب } \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \text{ جب } \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$$

اور اس عمل کو جاری رکھنے سے

$$\text{جب } \frac{\pi}{n} = 2 \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi + \pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi + \pi + \pi}{n} \dots \text{ جب } \frac{\pi + \pi + \pi + \pi + \pi}{n} = \pi (1 - n) + \pi$$

جہاں ن ۲ کی کوئی مثبت صحیح قوت ہے۔ پس

$$\text{جب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} \text{ (جب } \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \text{)} \text{ جب } \frac{1}{n}$$

$$\left(\text{جب } \frac{2}{n} - \text{جب } \frac{1}{n}\right) \dots \left(\text{جب } \frac{2(n-1)}{n} - \text{جب } \frac{1}{n}\right)$$

اور چونکہ ہنسلا = جب لاقم $\frac{ل}{ل} = ن$ اسلئے

$$n = 2^{-5} \text{جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n} \dots \text{جب } \frac{\pi^2(n-2)}{n^2}$$

پس عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\dots\dots\dots \left(\frac{\text{جب } \frac{2}{3} \text{ ل}}{\text{جب } \frac{2}{3} \text{ ل}} - 1 \right) \left(\frac{\text{جب } \frac{2}{3} \text{ ل}}{\text{جب } \frac{2}{3} \text{ ل}} - 1 \right) = \frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب ل حم ل}}$$

$$(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{\sigma}}{\frac{\pi (2 - \sigma)}{\sigma}})$$

یہ دفعہ ۸۷ کے مسئلہ (۱۹) کی وہ خاص صورت ہے جبکہ 'ن' ۲ کی ایک قوت ہو۔ بلاشبہ ہم اس عام مسئلہ کو اختیار کر سکتے تھے۔ فرض کرو $\frac{1}{p} = (n-2) = r$ ، تب اگر 'م کوئی عدد ہو ر سے چھوٹا تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جب لا} \text{جم لا} \left(1 - \frac{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}}{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}} \right) \left(1 - \frac{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}}{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}} \right) \dots \left(1 - \frac{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}}{\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جب لا}} \right) \text{ب}$$

$$\text{جب لا} = \text{ن جب لا} \text{جم لا} \left(1 - \frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب لا}} \right) \left(1 - \frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب لا}} \right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب لا}} \right) \left(1 - \frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب لا}} \right)$$

متسع ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب $\Pi (1 + x^n)$ مستحق نہیں ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

اور \pm خ فین میں اوپر کی مثبت علامت لینی چاہئے اگر بس مثبت ہے اور منفی علامت لینی چاہئے اگر پ منفی ہے۔ اگر ضد اختیار طور پر متعجب ایک مثبت عدد ایک سے کم ہو تو ان کی تمام کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے فین < (۱-ضد) مس فین، اور اس لئے

ۛ فن مستق نہیں ہو سکتا۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ II (۱+ بن) مستق نہیں ہو سکتا اگرچہ II (۱+ بن) مستق ہوگا اگر سلسلہ ۛ بن مستق ہو۔ اس مسئلہ کے جواز کے لئے یہ صریحا کافی ہے کہ تمام عدد بن سوائے ایک محدود جٹ کے ہم علامت ہونے چاہئیں اگرچہ ملحق عدد لا + خ یا ہو اور عدد لا، کم، ... بن، ...

سب کے سب مثبت ہوں اور ایسے ہوں کہ 3 ان متع ہے تو حاصل ضرب $\Pi (1 + 1)$ یقیناً متع ہے اگر γ کا حقیقی حصہ مثبت ہو۔ کیونکہ رقموں $1 + 1$ کے مقیاسوں کا حاصل ضرب، حاصل ضرب $\Pi (1 + 1)$ سے بڑا ہے اور یہ ثانی الذکر حاصل ضرب متع ہے جبکہ لا مثبت ہو۔

ماصل ضرب $(1 + \frac{a}{b_1}) (1 + \frac{a}{b_2}) \dots (1 + \frac{a}{b_n}) \dots$ جبکہ

اگر یہ سلسلہ مستند ہے تو لامتناہی حاصل ضرب صفر سے مختلف ایک معین انتہا کی طرف مستند ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے۔ اگر یہ لامتناہی حاصل ضرب صفر کی طرف مستند ہو تو سلسلہ یا ∞ کی طرف متسع ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خراج کرتے ہیں۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لامتناہی سلسلہ کا استدقاق لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے حامل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صہ کے جواب میں n منتخب ہو سکے ایسا کہ $r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے

لوک $(1 + \frac{1}{n})$ یا $(1 + \frac{1}{n})$ لوک $(1 + \frac{1}{n})$ یا $(1 + \frac{1}{n})$ -
اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (د) میں ثابت کردہ مسئلہ

اے۔ اے $(1 + \frac{1}{n})$ یا $(1 + \frac{1}{n})$ کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے | غن، ر | $(1 + \frac{1}{n})$ صہ (ق)۔ اب اگر صہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ $(1 + \frac{1}{n})$ صہ (ق) > صہ، اور اسلئے n منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے | غن، ر | یا $(1 + \frac{1}{n})$ یا $(1 + \frac{1}{n})$ یا $(1 + \frac{1}{n})$ -
> صہ، اس لئے لامتناہی حاصل ضرب مستند ہے۔ اس کے بالعکس مان لو کہ $r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے n منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ | غن، ر | $(1 + \frac{1}{n})$ صہ - دفعہ ۲۳۹ (د) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

ای | > | اتو

$$| \text{لوک} (1+Y) | > | \text{ای} | \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-Y} \right)$$

$$\text{اس لئے } | \text{لوک} (1+Y) | > | \text{صہ} | \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-Y} \right)$$

$$\text{یا } | \text{لوک} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) | > | \text{ضہ} |$$

(340)

بشرطیکہ $| \text{صہ} | \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-Y} \right) > | \text{ضہ} |$ اور اگر ضہ مقررہ ہے تو
صہ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استدقاق

کی شرط پوری ہو چکی۔
۲۸۰۔ فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ ہے
جس میں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی
حاصل ضرب

$$(1+E_1)(1+E_2)\dots(1+E_n)\dots$$

$$\text{اور } (1-E_1)(1-E_2)\dots(1-E_n)\dots$$

دونوں مستدق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots$ مستدق
ہو اور مستدق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متع ہو۔

چونکہ

$$(1+E_1)(1+E_2)\dots(1+E_n) < 1 + E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

اسلئے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب $(1+E_1)(1+E_2)\dots$ متع ہوتا ہے اگر سلسلہ
 $E_1 + E_2 + \dots$ متع ہو۔

نیز

$$\frac{1}{(1-e)(1-e^2)\dots(1-e^{n-1})} < (1+e)(1+e^2)\dots(1+e^{n-1})$$

پس اگر $\sum e$ متع ہو تو حاصل ضرب $(1-e)(1-e^2)\dots(1-e^{n-1})$ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستقیم خیال کیا جاتا ہے۔
پھر اگر $\sum e$ مستقیم ہو تو فرض کرو کہ صبر اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو n منتخب ہو سکتا ہے
ایسا کہ $r=1, 2, 3, \dots$ کے لئے

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n > r$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_n)$$

$$< 1 - (e_1 + e_2 + \dots + e_n) < 1 - r$$

$$\text{اور اسلئے } |(1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_n) - 1| > r$$

اور اس طرح وہ شرط جو لائتناہی حاصل ضرب $\prod (1-e_i)$ کے استقامت کے لئے دفعہ ۲۴۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+e_1)(1+e_2)\dots(1+e_n)$$

$$> \frac{1}{(1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_n)} > \frac{1}{1-r}$$

(341)

اور اسلئے $| (1+n) (2+n) \dots (n+r) - 1 | > \frac{1}{n}$
 پس اگر n اختیارى طور پر منتخب ہو تو ہم n کو متعین کر سکتے ہیں ایسا کہ
 $\frac{1}{n} > (1+n) > n$ اور اسلئے n متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ
 $r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے

$$| (1+n) (2+n) \dots (n+r) - 1 | > \frac{1}{n}$$

اس لئے حاصل ضرب $(1+n) (2+n) \dots (n+r)$ مستحق ہے۔ یہ واضح ہے کہ
 اس شرط کی بجائے کہ $n, n+1, n+2, \dots$ سب کے سب
 ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جا سکتی ہے کہ ان عددوں کے ایک
 محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم
 $(1+n) (2+n) \dots (n+r)$ سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد
 اس کے استحقاق کو متاثر کئے بغیر غلط کر سکتے ہیں۔

۲۸۱۔ اب لامتناہی حاصل ضرب

$(1+n) (2+n) \dots (n+r) \dots$
 پر غور کرو جہاں $n, n+1, n+2, \dots$ ملحق عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائی گئے کہ $n, n+1, n+2, \dots$ کے تقیاسوں کا سلسلہ

$$1, 2, 3, \dots + 1, 2, 3, \dots + 1, 2, 3, \dots$$

مستحق ہو تو اگر کالامتناہی حاصل ضرب بھی مستحق ہے۔ اس
 صورت میں لامتناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستحق کہتے ہیں۔
 ہم دیکھتے ہیں کہ

$$| (1+n) (2+n) \dots (n+r) - 1 |$$

$$\geq (1+n) (2+n) \dots (n+r) - 1$$

جہاں عہ دائری ناپ کی اکائی ہے۔

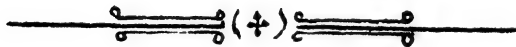
۱۳۔ یولر کا مسئلہ جب $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \text{ لا جم } \frac{1}{n} \text{ لا جم } \frac{1}{8} \text{ لا} \dots$ سے اخذ کرو

$$(1) \quad \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}}$$

$$+ \dots + \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \times \frac{1}{8} +$$

$$(2) \quad \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ قطر } \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ قطر } \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ قطر } \frac{1}{8} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ قطر } \frac{1}{8} + \dots$$



سترہواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۹۷۲۔ فرض کرو کہ حقیقی یا ملقف عددوں کا ایک تو اتری 'ی' ہے
 'ی' ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے۔ ان عددوں
 میں سے پہلے 'ن' عددوں کے حاصل ضرب $ض \times ی = ی \times ی$ پر غور کرو۔

اگر $ض$ صفر سے مختلف ایک معین انتہا $ض$ کی طرف
 مستقیم ہو جبکہ 'ن' کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ $ض$
 لامتناہی حاصل ضرب $ی \times ی$ کی انتہا یا انتہائی قیمت
 ہے اور یہ لامتناہی حاصل ضرب مستقیم ہے۔
 مستقیم لامتناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے ان حاصل ضربوں
 کو خارج کر دینا سہولت بخش ہے جن کے لئے $ض$ صفر کی طرف
 مستقیم ہو۔
 اگر $ض = ی$ (جم طین + خ جب طین) جہاں $ض$ یا $ض$ کے

$$\text{جہاں } \left(1 - \frac{\text{جبا}^2}{\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جبا}^2}{\pi(1+m)}\right) = \text{ب}$$

اب ن کو ۲ لا \pi سے بڑا لیکر م کو منتخب کیا جاسکتا ہے ایسا (344)
 لا > \pi(1+m) تب ب مثبت ہے اور ایک سے کم۔ نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

$$\text{ب} < 1 - \frac{\text{جبا}^2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{\pi} + \dots + \frac{\pi(1+m)}{\pi} \right\} \text{م}^2$$

اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھانے کیے ہیں کہ اگر ط > \pi \frac{1}{2} تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\pi \frac{1}{2}} < \frac{\text{جبا}^2}{\pi \frac{1}{2}}$$

پس اگر ف > \frac{\pi}{2} تو م^2 ف > \frac{\pi}{2} نیز جبا^2 > \frac{\pi}{2}

اسلئے ب < 1 - \frac{\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{(2+m)} + \frac{1}{(1+m)} \right\}

$$< 1 - \frac{\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{(1-r)} + \dots + \frac{1}{(2+m)(1+m)} + \frac{1}{(1+m)} \right\}$$

$$< 1 - \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m} \right) \frac{\pi}{\pi} < 1 - \frac{\pi}{\pi}$$

چونکہ ب ایک اور 1 - \frac{\pi}{\pi} کے درمیان ہے اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں

ب = ۱ - $\frac{ط^۲}{م}$ جہاں ط ، صفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$جب لا = ن جب لا = ن جم لا (۱ - \frac{جب^۲}{ن}) (۱ - \frac{جب^۲}{ن}) \dots$$

$$\dots (۱ - \frac{جب^۲}{ن}) (۱ - \frac{ط^۲}{م})$$

جہاں م ، ۱ - ن سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ $لا > (۱ + م) - \pi$ ۔
اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے لیکن م ثابت رہتا ہے
تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا
جاسکتا ہے اور چونکہ جم $\frac{لا}{ن}$ کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$جب لا = لا (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{ط^۲}{م})$$

جہاں ط ، ط کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا لیا جاتا ہے
اور اسلئے ط ، ایسا ہے کہ $ط \geq ۱ -$

اب م کو کافی طور پر بڑا کرنے سے ہم جزو ضربی ۱ - $\frac{ط^۲}{م}$ کو ایک کے

انتقارب لاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اسلئے جب لا کے لئے لاستناہی
حاصل ضرب کے طور پر جملہ حاصل ہوتا ہے

$$جب لا = لا (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱)$$

لہ اس دفعہ کی تحقیق "Schlömlich" سے منسوب ہے دیکھو اسکی

یہ قید کہ لامتناہی ہونا چاہئے صریحاً اٹھالی جاسکتی ہے۔
۲۸۳۔ اگر n جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right)$$

جہاں m کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ $\lambda > \pi(1+m^2)$ اور طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم لا کے لئے لامتناہی حامل ضرب کے طور پر ضابطہ حامل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}^2 \frac{\lambda}{m}}{\pi}\right) \dots \dots \dots (2)$$

۲۸۴۔ ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مد نظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دینگے جو سیٹرٹ کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{جب} \frac{\lambda}{n} \text{ جم} \frac{\lambda}{n} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\text{جم لا} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right)^{\frac{1}{r}}$$

(346) کو جو n کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ

$$1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi} = \text{جم}^2 \frac{\lambda}{n} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi}\right)$$

کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

تحویل کر سکتے ہیں

$$\text{جب } \frac{\lambda}{n} = \frac{r}{n} \text{ جم } \frac{\lambda}{n} \text{ مس } \frac{\lambda}{n} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)}$$

$$\text{جم } \frac{\lambda}{n} = \frac{r}{n} \text{ جم } \frac{\lambda}{n} \text{ مس } \frac{\lambda}{n} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)}$$

اب دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب طہ صفر سے $\frac{1}{4} \pi$ تک بڑھتا ہے جب طہ گھٹتا ہے اور مس طہ بڑھتا اس لئے

$$\left(\frac{\lambda}{n} \sim \frac{r}{n} \right) > \left(\frac{\lambda}{n} \sim \frac{r}{n} \right) > \left(\frac{\lambda}{n} \sim \frac{r}{n} \right)$$

جہاں ہر جملہ کی مطلق قیمت یعنی چاہئے فرض کرو کہ $\frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n}$ استقریہ ہے کہ $\frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n}$

تب $\frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n} > \frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n}$ اور $\frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n}$ جہاں علامتیں ایسی یعنی چاہئیں کہ ہر جملہ اپنی حسابی قیمت رکھے۔ جب لاکہ دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{ جب } \frac{\lambda}{n} > \frac{r}{n} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)}$$

$$\text{اور } \pm \text{ جب } \frac{\lambda}{n} < \frac{r}{n} \text{ جم } \frac{\lambda}{n} \times \frac{\lambda}{n} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)} \text{ } \left(\frac{\frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{2} (r-n)}$$

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{جم لا} > \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{r^2}{\pi^2} \right) \quad \text{جم لا}$$

$$\text{اور } \pm \text{جم لا} < \pm \text{جم لا} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{r^2}{\pi^2} \right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{n} = 1 - \text{صن جہاں صن ایک عدد}$
جو صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے جبکہ n کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = \left(1 - \frac{1^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{2^2}{\pi^2} \right) \dots \left(1 - \frac{n^2}{\pi^2} \right)$$

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{1^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{2^2}{\pi^2} \right) \dots \left(1 - \frac{n^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{n^2}{\pi^2} \right)$$

جہاں صن ، صن صفر کی طرف مستحق ہوتے ہیں جبکہ n کو لا انتہا
بڑھا دیا جاتا ہے، پس اس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں
اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = n \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{r^2}{\pi^2} \right) \quad \text{جب لا}$$

$$\text{جم لا} = \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{r^2}{\pi^2} \right) \quad \text{جب لا}$$

کو جو ن کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے ضابطہ

$$\text{جب لا} = \text{جم} \frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}} (1 - \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}) \left(\frac{\text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم} \frac{\text{ن}}{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}} (1 - \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}) \left(\frac{\text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}} \right)$$

مائل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجہ حاصل ہوتے۔
۲۸۵۔ اب ہم ملحق عدد می = لا + خ یا کی صورت پر غور کریں گے۔
دفعہ ۲۸۲ کے مطابق نہیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب می} = \text{ن جب می جم} \frac{\text{می}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right) \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right) \dots \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right) \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{جہاں جب} = \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right) \dots \dots \dots \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right) \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} \right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور $\frac{1}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}} (2 - \text{ن})$ ۔ ہمیں ب کی قیمت کے لئے حدود متعین کرنا ہے۔ فرض کرو کہ جب $\frac{\text{می}}{\text{ن}}$ کا مقیاس غ سے تعبیر ہوتا ہے تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق چونکہ کسی عددوں کے مجموعہ کا مقیاس انکے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ (ب - ۱) کا مقیاس جملہ

$$1 - \left(\frac{\text{غہ} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} + 1 \right) \dots \dots \left(\frac{\text{غہ} \frac{\text{می}}{\text{ن}}}{\text{جب} \frac{\text{می}}{\text{ن}}} + 1 \right)$$

سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{غہ}^2 < 1 + (\text{غہ}^2 \text{ اگر } 1 \text{ کوئی مثبت عدد ہو، اسلئے}$

$$(ج-۱) \text{ کا مقیاس } > \text{غہ}^2 \left(\text{تم}^2 \frac{1}{n} + \dots + \text{تم}^2 \frac{1}{n} \right) - 1$$

$$\text{اور یہ } > \text{غہ}^2 \left\{ \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)} \right\} - 1$$

$$\text{یا } > \text{غہ}^2 \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} \right\} - 1$$

$$\text{اسلئے (ج-۱) کا مقیاس } > \text{غہ}^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{m+1} \right) - 1$$

$$\text{یا } > \frac{1}{m} \text{ غہ}^2 - 1$$

پس (ج-۱) کا مقیاس صفر اور $\frac{1}{m} \text{ غہ}^2 - 1$ کے درمیان واقع ہے۔
اب

$$\text{غہ}^2 = \text{جب } \frac{1}{n} \text{ جبر } \frac{1}{n} + \text{جم } \frac{1}{n} \text{ جبر } \frac{1}{n} = \text{جب } \frac{1}{n} \text{ جبر } \frac{1}{n}$$

اسلئے غہ^۲ کی انتہائی قیمت لا + ما ہے اور اسلئے (ج-۱) کے مقیاس کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے صفر اور $\frac{1}{m} \text{ غہ}^2 - 1$ کے

درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ $\frac{1}{m} \text{ غہ}^2$ کو کم کے کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے (ج-۱) کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ جب ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے تو جب ی کے جملہ کی

ہر جیب آخر لامر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے

$$\text{جب } Y = Y \quad (1 - \frac{Y^1}{\pi}) (1 - \frac{Y^2}{\pi^2}) (1 - \frac{Y^3}{\pi^3}) \dots \dots$$

اسی طرح ضابطہ

$$\text{جم } Y = (1 - \frac{Y^4}{\pi^4}) (1 - \frac{Y^5}{\pi^5}) (1 - \frac{Y^6}{\pi^6}) \dots \dots$$

کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استدقاق کی اس شرط کو جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے

$$\frac{Y}{\pi} \times \frac{1}{n} \text{ اور } \frac{Y^2}{\pi^2} \times \frac{1}{(1-r^2)} \text{ مستحق ہیں۔ ان}$$

ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجہ جزو ضربی دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، چنانچہ

(340)

$$\text{جب } L = L \quad (1 + \frac{L}{\pi}) (1 - \frac{L}{\pi}) (1 + \frac{L}{\pi^2}) (1 - \frac{L}{\pi^2}) \dots \dots$$

$$\text{جم } L = (1 + \frac{L^2}{\pi^2}) (1 - \frac{L^2}{\pi^2}) (1 + \frac{L^2}{\pi^3}) (1 - \frac{L^2}{\pi^3}) \dots \dots$$

جنکو شکلوں

$$\text{جب } L = L \quad \frac{L}{\pi} \times \frac{1}{(1-r^2)} \dots \dots (3)$$

$$\text{جم } L = \frac{L^2}{\pi^2} \times \frac{1}{(1-r^2)} \dots \dots (4)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

ان آخری شکلوں میں حاصل ضرب نیم مستحق ہیں کیونکہ حسب ذیل حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

متع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے $\frac{1}{n^2}$ ، $\frac{1}{n^4}$ ، $\frac{1}{n^6}$ متع ہیں۔
 کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت کے حامل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو بدلہ دینے سے حاصل ضرب کی قیمت بدلاؤ پڑتا ہے، ہم ضابطوں (۳) اور (۴) کو صحیح خیال کر سکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ رکی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی لگی ہو ہے، اس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

کا اختصار سمجھنا چاہئے۔
 ۲۸۷ — ویرسٹراس (Weierstrass) نے یہ ثابت کیا ہے کہ متع حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

مطلقاً مستدق ہے۔

چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۱)

(350)

$$\text{قو} \frac{y}{\pi n} = 1 - \frac{y}{\pi n} + \frac{y^2}{2\pi^2 n^2} (1 + \epsilon_n)$$

جہاں ϵ_n صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ n کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے، اسلئے اگر صہ اختیاری طور پر نتیجہ کوئی مثبت عدد ہو تو $\epsilon_n > 0$ صہ، n کی تمام قیمتوں کے لئے جو صہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left\{ \left(\frac{y}{\pi n} + 1 \right) = \text{قو} \frac{y}{\pi n} \right\} \left\{ 1 - \frac{y}{\pi n} + \frac{y^2}{2\pi^2 n^2} (1 + \epsilon_n) \right\}$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2\pi^2 n^2} (1 - \epsilon_n) + \frac{y^2}{2\pi^2 n^2} (1 + \epsilon_n)$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\left\{ \frac{y^2}{2\pi^2 n^2} (1 - \epsilon_n - \epsilon_n + 1) \right\}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ n کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کے لئے

سلسلے $\frac{1}{n^2}$ مستدق ہیں، اور $\epsilon_n > 0$ صہ، $\epsilon_n < 0$ صہ

+ صہ۔ اسلئے بموجب اس مسئلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہو چکا

ہے وہ لاستناہی مائل ضرب جسکی عام رقم

$$-1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2} (-1 - \epsilon_n) + \frac{y^2}{\pi^2 n^2} (1 + \epsilon_n)$$

$$یا \left(1 + \frac{y}{\pi n}\right) \omega^{-\frac{y}{\pi n}}$$

ہے مطلقاً مستحق ہے۔

اگر ف (ی) سے مطلقاً مستحق حامل منتر $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{\pi n}\right) \omega^{-\frac{y}{\pi n}}$

کی انتہا اور ف (-ی) سے $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{\pi n}\right) \omega^{-\frac{y}{\pi n}}$ کی انتہا تبصیر ہوتو

$$ف (ی) ف (-ی) = \frac{y}{\pi}$$

اوپر کا یہ نتیجہ جملہ

$$ف (ی) = (1 - \frac{y}{\pi}) (1 - \frac{y}{2\pi}) \dots (1 - \frac{y}{n\pi}) \dots (1 + \frac{y}{\pi}) (1 + \frac{y}{2\pi}) \dots$$

$$\dots (1 + \frac{y}{m\pi}) \dots$$

کی قیمت محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ م اور ن کو لا انتہا بڑا بنایا گیا ہو لیکن اس طور پر کہ انکی نسبت ایک معین عدد و انتہا رکھے۔

اگر م، سلسلہ آ + ۱، ۲ + ۱، ۳ + ۱، ... + ن کو تبصیر کرے تو

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$جب ی = ی نہا ف (ی) \omega^{-\frac{y}{\pi}} (س - س م)$$

اب یہ بہت مشہور ہے کہ م - لوک ن کی انتہا جبکہ ن لا انتہا (351)

محدود عدد $0.5642156 \dots$ ہے جسکو یو لرا کا مستقل کہتے ہیں،
اس لئے n - m کی انتہائی قیمت جبکہ m اور n لامتناہی
ہوں لوگو $\frac{n}{m}$ کی انتہائی قیمت ہے۔ پس

$$\text{ہناسفہ (ی)} = \text{ک}^{\frac{y}{x}} \times \text{جب ی}$$

جہاں $k = \text{ہناسفہ}$ اور ہناسفہ (ی) کی قیمت = جب ی صرف

اسوقت جبکہ m اور n مساوی ہوتے ہوئے لامتناہی ہو جائیں۔

۲۸۸ — جم لا کے ضابطہ (۲) یا (۴) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ
جم لا = جب لا ۲ \ ۱ جب لا کے ذریعہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

$$\text{جب لا}^2 = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{لا}^2}{r^2}\right) \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{لا}^2}{r^2}\right)$$

شمار کنندہ کے وہ اجزاء ضربی جنکے لئے رجعت ہے نسب نما کے
اجزاء ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ

کے حاصل ضرب کو $\prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{\text{لا}^2}{r^2}\right)$ کی انتہا اور نسب نما کے حاصل

کو $\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{لا}^2}{r^2}\right)$ کی انتہا خیال کریں جبکہ n لامتناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{لا}^2}{r^2}\right)$$

جو (۲) یا (۴) کے مثال ہے۔ حاصل ضربوں کے استنتاج کی شرط

سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں n کی بجائے $2n$
لینے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ

n کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ - ضابطوں جب لا = جم (لا - $\frac{1}{r}$ - π) جب (لا - $\frac{1}{r}$ - π) کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے یا اس کے بالعکس - ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi(1-r^2)} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi(1-r^2)} \right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \times \frac{r^2}{1-r^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r} \right)$$

جہاں جزو ضربی لا، ر = کے جواب میں ہے۔ لا = کیلئے جب لا کی انتہا

لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r} \right) = 1$ پس

$$\text{جب لا} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r} \right)$$

۲۹۰ - جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے ان کے دورنی (Periodic) ہونے کی خاصیت ظاہر ہو جو تفافعلوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے۔

$$\text{فرض کرو } f(\text{لا}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r} \right)$$

تو

$$f(\text{لا}) = (\pi + \text{لا}) (\pi + \frac{\text{لا}}{r}) (\pi + \frac{\text{لا}}{r^2}) \dots$$

$$\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi} \right) \left(1 - \frac{\text{لا}}{\pi} \right) \dots \left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi} \right) \left(1 - \frac{\text{لا}}{\pi} \right) \dots$$

$$= \text{لا} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{r^n} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{r^n} \right)$$

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے۔ اس صورت میں
جیڑا کے لئے لاستناہی حاصل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جیڑا} = \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \dots (5)$$

$$\text{جیڑا} = \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \left(\frac{1}{2\pi} + 1\right) \dots (6)$$

(353)

یوں نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متانہ

$$\left\{ \frac{1 - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \text{ جم } 2-1}{\frac{1}{2\pi} \text{ جم } 2-2} \right\}^{1-\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} (1 - \frac{1}{2\pi})^{1-\frac{1}{2\pi}}$$

کی مدد سے سب سے اول حاصل کیا تھا۔ رکھو $1 + \frac{1}{2\pi}$ تو یہ متانہ ہو جاتی ہے

$$\left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) - \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2\pi}} = \frac{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}}{\frac{1}{2\pi} + 1} = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2\pi}}$$

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2\pi}} \right\}$$

اب اگر m کو لا انتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متانہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{2\pi} (1 - \frac{1}{2\pi})^{-\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2\pi}}$$

جو ضابطہ (۵) ہے۔ انتہا کی اس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح ٹھیک تحقیقات کی
ضرورت ہے۔

ضابطہ (۱)، لا کو x لایں تبدیل کر کے اخذ کیا گیا تھا، اور اسی طرح

ضابطہ (۲) اور (۶) $1 + \frac{1}{2\pi}$ کے ان جملوں سے حاصل کئے گئے تھے جو اجوائے ضرورت

میں ہیں۔

مثالیں

۲۹۲۔ (۱) π کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔
جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا $= \frac{1}{\pi}$ رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

مائل ہوتا ہے جبکہ n بڑا ہو۔ اس کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sqrt{\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}} = \pi \frac{1}{2}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲) جنرما۔ جم عہ، جم لا۔ جم عہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔
جنرما۔ جم عہ = ۲ جب $\frac{1}{\pi}$ (عہ + خما) جب $\frac{1}{\pi}$ (عہ - خما)

$$\left\{ \frac{(عہ + خما)^2}{2\pi^2 n^2} - 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (عہ + خما)^2 =$$

$$\left\{ \frac{(عہ - خما)^2}{2\pi^2 n^2} - 1 \right\} \times$$

اور ما = . رکھنے سے

$$1 - جم عہ = \frac{1}{2} \pi^2 (عہ)^2 \left(1 - \frac{(عہ)^2}{2\pi^2 n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty}$$

پس

$$\frac{جم عہ - جم عہ}{جم عہ} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(عہ)^2}{2\pi^2 n^2}\right) \left(1 - \frac{(عہ)^2}{2\pi^2 n^2}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{خما}{عہ + \pi n^2}\right) \left(1 - \frac{خما}{عہ - \pi n^2}\right)$$

اس لئے

$$\left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} + 1 \right\}^\infty \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} + 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi^2} = 1$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} + 1 \right\}^\infty \times$$

اس میں مابقی بجا کر خ لا رکھنے سے

$$\left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right\}^\infty \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi^2} = 1$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right\}^\infty \times$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2 9} + \frac{1}{\pi^2 25} + \frac{1}{\pi^2 36} + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi^2} \times \frac{1}{\pi^2} \right)$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right\}^\infty \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2}) = (1 + \frac{1}{\pi^2})$$

اس لئے لوکار تم لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

لوک (جب لا جنرما + خ جم لا جنرما) = لوک (لا + خ ما)

$$+ \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right\}^\infty \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 (2n-1)^2} - 1 \right) =$$

اس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi^2} \times \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi^2} \times \frac{1}{\pi^2} \right)$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 1$$

فرض کرو

(355)

(۳) اگر $n = 2^m$ فہم.... فہ تو ک $n = (1 - 2^{-m})$
 (۴) اگر n کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو ک $n =$
 اب یہ واقعہ کہ ک n کی ان قیمتوں کے ساتھ جو حسب تشریح
 بالا حاصل ہوتی ہیں سلسلہ

ح ک لوک $(1 + 1)$

ای $| > |$ کے لئے مستحق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے۔
 پس y کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ $| > |$ ا قوت نما تفاعل
 فو اس لامتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k}) = (1 + \frac{1}{1}) (1 + \frac{1}{2}) (1 + \frac{1}{3}) \dots$$

یے تعبیر ہوتا ہے، یا چونکہ $1 = (1 - \frac{1}{2}) (1 + \frac{1}{2}) (1 + \frac{1}{4}) \dots$ اسلئے عمل
 تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$1 > | = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k}) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k})$$

جہاں f ، مہ غیر مساوی طاق مفردوں کا حاصل ضرب ہے اور f کی
 سب قیمتیں جو اس شکل کی ہیں لگائی ہیں۔

ماس، ماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلے

$$293 - \text{چونکہ جب } y = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2}) \text{ اس لئے اگر } y \text{ کا ضعف نہیں ہے تو}$$

$$\text{لوک } \pi \text{ جب } y = \text{لوک } y + \frac{\infty}{\pi} \text{ لوک } (1 - \frac{y}{\pi})$$

فرض کرو کہ π ایک مثبت حقیقی عدد ہے۔ تب y کو $y + \pi$ میں تبدیل کرنے سے اور پھر ان دو جملوں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک } \pi \text{ جب } (y + \pi) = \text{لوک } (y + \frac{\infty}{\pi}) + \frac{\infty + \pi}{\pi} \text{ لوک } (1 + \frac{y}{\pi})$$

$$+ \text{لوک } (1 + \frac{y}{\pi})$$

اب دفعہ ۲۴۹ (۱) کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{لوک } (1 + \frac{y}{\pi}) = \frac{y}{\pi} - \frac{1}{\pi} \text{ لوک } (1 + \frac{y}{\pi})$$

$$\text{لوک } (1 + \frac{y}{\pi}) = \frac{y}{\pi} - \frac{1}{\pi} \text{ لوک } (1 + \frac{y}{\pi})$$

$$\text{لوک } (1 + \frac{y}{\pi}) = \frac{y}{\pi} - \frac{1}{\pi} \text{ لوک } (1 + \frac{y}{\pi})$$

جہاں π ، π ، π سب کے سب صفر کی طرف مستحق ہوتے ہیں

(356)

جبکہ π کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ مزید براں اگر y کی کوئی ثابت قیمت ہو جو صفر نہیں ہے یا π کا مثبت یا منفی صحیح عددی ضعیف تو π کی کافی طور پر چھوٹی سب قیمتوں کے لئے عدد π ، π ، π اور π اور π ، π ، π اور π سب کے سب کسی اختیاری طور پر منتخب مثبت عدد π سے کم ہیں کیونکہ π ، π ، π اور π کے مقیاس کسی ثابت عدد سے جو π پر منحصر نہیں ہے بڑے ہیں۔

پس اب

$$\frac{1}{h} \text{ لوک } \frac{\text{جب } (y + \infty)}{\text{جب } y}$$

$$= \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] \frac{\infty}{1} + \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] \frac{\infty}{1} = \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] \frac{\infty}{1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}$$

$$\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] \frac{\infty}{1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}$$

جہاں بائیں جانب کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ ی، π کا ضعف نہ ہو
فرض کر دو کہ ی ہے ایسا کہ (۱-۱) π > |ای| > π ر جہاں
ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تب اگر ی |ر| π = ضہ > |تو ن کی
سب قیمتوں کے لئے جو ر سے بڑی یا اسکے مساوی ہوں

$$ای |ر| π \geq \text{ضہ} - اب$$

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \geq \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}$$

بشرطیکہ ن ≤ ر، پس چونکہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم ن ہے مستحق
ہے اسلئے وہ سلسلہ جسکی عام رقم ن ہے مطلقاً مستحق ہے۔
اب چونکہ وہ دو سلسلے جسکی عام رقمیں ہیں

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}$$

دونوں مستحق ہیں اسلئے وہ سلسلہ بھی جسکی عام رقم ہے

ہے مستحق ہے۔ اگر $\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\pi n + 1}}$ کا مقیاس
 ہے مستحق ہے۔ اگر $\frac{1}{2}$ کافی طور پر چھوٹا ہو تو اس عام رقم کا مقیاس

$$\left\{ \frac{1}{2^{\pi n + 1}} + \frac{1}{2^{\pi n - 1}} \right\} (1 + \frac{1}{2}) >$$

اب $| \pi n - 1 | \leq \pi n - 1 \leq \pi n - (1 + \pi) \leq \pi n - 1$ اسلئے

$$\frac{1}{2^{\pi n - 1}} > \frac{1}{2^{\pi n - (1 + \pi)}}$$

جہاں $n < 1 + \pi$ پس یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم

(357)

$\frac{1}{2^{\pi n - 1}}$ ہے مستحق ہے۔ اسی طرح وہ سلسلہ جس کی عام

$\frac{1}{2^{\pi n + 1}}$ ہے مستحق ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس سلسلہ کے مجموعہ کا مقیاس جسکی

عام رقم $\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\pi n + 1}}$ ہے عدد

$\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں $(1 + \frac{1}{2})$ ایک

مثبت عدد ہے جو صرف $\frac{1}{2}$ پر منحصر ہے، یہ مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے
 جبکہ $\frac{1}{2}$ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\pi n + 1}} \leftarrow \frac{1}{2} \text{ کو جب } (1 + \frac{1}{2})$$

چونکہ جب (ی+۴) = جم ۴ + جب ۴ مم ی = ا+۴ مم ی (ا+ض) جہاں اضا ۴ کے ساتھ صفر کی طرف مستند ہوتا ہے اسلئے
 $\frac{1}{۴}$ لوک نو جب (ی+۴) = $\frac{1}{۴}$ لوک نو {ا+۴ مم ی (ا+ض)}

= مم ی (ا+ض) (ا+ض)
 جہاں اضا ۴ کے ساتھ صفر کی طرف مستند ہوتا ہے۔ پس

ہیسا۔ $\frac{1}{۴}$ لوک نو جب (ی+۴) = مم ی
 اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب ی کوئی حقیقی یا ملقف عدد ہو جو π کا صحیح عددی ضعف نہیں ہے تو مم ی اس مستند سلسلہ

$$\frac{1}{۴} + \frac{1}{\pi + ۴} + \frac{1}{\pi - ۴} + \frac{1}{\pi^2 + ۴} + \frac{1}{\pi^2 - ۴} + \dots$$

$$\text{کا 'یا' } \frac{1}{۴} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - ۴} \quad (۸)$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالا نیم مستند ہے اور شکل (۸) میں وہ مطلقاً مستند ہے، بجزی = $\pi \pm ۴$ ، $\pi^2 \pm ۴$ ، ... کے اور ان قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ منع ہے۔

مندرجہ صدر تحقیق کی ضرورت جتانے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ

اگر ف (ی) مستند سلسلہ ۴ (ی) + ۴ (ی) + ... + ۴ (ی) + ... کا مجموعہ ہو تو ہمیں یہ مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے کہ

$$\text{ہیسا۔} \quad \frac{۴}{۴} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۴}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

(358)

فرض کرو کہ اس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد بام (ی) ہے تو

$$ف(ی) = ۱(ی) + ۶(ی) + ۶(ی) + \dots + ۶(ی) + بام(ی)$$

$$ف(ی+۴) = ۱(ی+۴) + ۶(ی+۴) + ۶(ی+۴) + \dots + ۶(ی+۴) + بام(ی+۴)$$

$$\frac{اسلئے\ نہیا}{۴} = \frac{ف(ی+۴) - ف(ی)}{۴} = \frac{۶(ی+۴) - ۶(ی)}{۴} = ۶$$

$$+ \frac{بام(ی+۴) - بام(ی)}{۴}$$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستحق ہے بام (ی) بام (ی+۴) لائنہا
چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نقصان ضروری
نہیں کہ نہیا $\frac{بام(ی+۴) - بام(ی)}{۴}$ بھی لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

مرف اس وقت جبکہ یہ انتہا یعنی نہیا $\frac{بام(ی+۴) - بام(ی)}{۴}$ لا انتہا
چھوٹی ہو مشتق سلسلہ کو ف (ی) کے مشتق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جاسکتا
ہے۔ مثلاً اگر بام (ی) کی شکل $\frac{۱}{م}$ جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$نہیا \frac{بام(ی+۴) - بام(ی)}{۴} = \frac{۱}{م+۴} - \frac{۱}{م}$$

جو سفر کی طرف مستحق نہیں ہوتا جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن
قیسوں ± ۱ کے درمیان امتزاج کرتا ہے۔

۲۹۴ - جملہ

$$جم ی = (۱ - \frac{۱}{۲\pi}) (۱ - \frac{۱}{۲\pi}) (۱ - \frac{۱}{۲\pi}) \dots$$

سے دفعہ مابقی کے مثال طریقہ استعمال کر کے ہم لاستناہی سلسلہ

$$- \text{مس ی} = \frac{1}{\pi \frac{1}{4} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{1}{4} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{4} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{4} - \text{ی}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi (1 - m^2) \frac{1}{4} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi (1 - m^2) \frac{1}{4} - \text{ی}} + \dots (9)$$

$$\text{یا مس ی} = \text{ی}^8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - m^2)^2 - 2\pi^2 \text{ی}^2} \dots (10)$$

ماہل کرتے ہیں۔ سلسلہ (9) نیم مستقیم ہے لیکن سلسلہ (10) مطلقاً مستقیم

ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بحر $\pm \pi \frac{1}{4} \pm \pi \frac{3}{4} \pm \dots$ کے۔

۲۹۵ — ضابطوں قم ی = قم $\frac{1}{4}$ ی — قم ی کیا قم ی = $\frac{1}{4}$ قم $\frac{1}{4}$ ی

+ $\frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{4}$ ی کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں ماس التماسوں کی بجائے ان کے سلسلے درج

کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{1}{2} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{1}{2} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} - \text{ی}} + \dots \right]$$

$$- \left[\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{1}{2} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{1}{2} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} - \text{ی}} + \dots \right]$$

پس قم ی

$$= \frac{1}{\text{ی}} - \frac{1}{\pi \frac{1}{2} + \text{ی}} - \frac{1}{\pi \frac{1}{2} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi \frac{3}{2} - \text{ی}} - \frac{1}{\pi \frac{5}{2} + \text{ی}} - \frac{1}{\pi \frac{5}{2} - \text{ی}} + \dots$$

(11)

یا ق م ی = $\frac{1}{ی} + \frac{۲}{۲-۲\pi ی} (۱-۲ ی)$ (۱۲)

ضابطہ (۱۱) میں ی کو $\frac{۱}{\pi} + \frac{۱}{\pi}$ میں تبدیل کر دو

قط ی = $(\frac{1}{\pi \frac{1}{\pi} + ی} - \frac{1}{\pi \frac{1}{\pi} - ی}) - (\frac{1}{\pi \frac{1}{\pi} + ی} - \frac{1}{\pi \frac{1}{\pi} - ی})$ (۱۳)

یا قط ی = $\frac{\pi (۱-۲ ی)^{۱-۲}}{۲ ی - ۲\pi (۱-۲ ی)}$ (۱۴)

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ بڑا ہو قیمت $\frac{(۱-۲)^{۱-۲}}{۱-۲}$ کے قریب آتی ہے

اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستحق ہے۔

ماس التامی اور ماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں
جب (ی + ھ) اور جب ی کے لئے لاستناہی حاصل ضربوں کے
جو جملے ہیں انکو استعمال کر دو تو عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

جب (ی + ھ) = $(\frac{۲-۲ ی}{۲ ی - ۲\pi ۲}) (\frac{۲-۲ ی}{۲ ی - ۲\pi ۲}) (\frac{۲-۲ ی}{۲ ی - ۲\pi ۲})$

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے
ھ کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل
جم ھ + جب ھ مم ی میں رکھیں تو ھ کی قوتوں میں پھیلانے اور مساوات کی
طریقہ میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

م م ی = $\frac{۱}{ی} + \frac{۲}{۲\pi ۲ - ۲ ی} + \frac{۲}{۲\pi ۲ - ۲ ی} + \dots$ (۸)

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لاستناہی حاصل ضرب جس کے سر معمولی عمل ضرب
حاصل شدہ لاستناہی سلسلے ہیں ھ کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ ہیں

ترتیب دیا جاسکتا ہے اسکو اجہیت کے لئے ان شرطوں کی تحقیق کرنی ہوگی کہ ایسے عمل سے صحیح نتیجہ پیدا ہو، لیکن اس کے لئے بعض عام مسئلوں کی ضرورت پڑیگی جنکو بیان کرنے کی یہاں گنجائش نہیں ہے۔
عامی سلسلہ بھی اسی طرح لا متناہی حاصل ضرب

$$\text{جم (ی + ص)} = \frac{(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱) \text{ ی}}{(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱) \text{ ی}} = \frac{(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱) \text{ ی}}{(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱) \text{ ی}}$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر ی کے ماس التمام کو شکل

$$\left(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱ \right) \text{ ی} \mid \left(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱ \right) \text{ ی}$$

میں بیان کیا جائے اور اس جملہ کو جزوی کسروں میں تحویل کیا جائے جنکے

نسب ناجملہ ی $\left(\frac{۲۲}{۲۳} - ۱ \right)$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ہمیں سلسلہ

(۸) حاصل ہونا چاہئے، یہ بات مس ی، ق ی، تم ی پر بھی اسی طرح صادق آتی ہے۔ یہ سلسلے گلیش نے بالراست اس عمل تحویل کی تکمیل سے حاصل کئے تھے۔

دلیل کی قوتوں میں ماس، ماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کو بیان کرنا

(360)

۲۹۶ — دفعہ ۲۹۳ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ

$$\text{م ی} = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲۳} \text{ ی} + \text{ب م}$$

جہاں ب م ایک عدد ہے جسکو م کے کافی بڑا ہونے سے استقدر

چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔ اب اگر می کا مقیاس π سے کم ہو تو

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ می کا مقیاس π سے کم ہے تو کسروں $\frac{1}{\pi}$ میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر پھیلا سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستند ہے ہم نتیجہ کو می کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \dots - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \dots$$

فرض کرو کہ صہن سے مستند سلسلہ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے تب صہن = $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$
+ صہن جہاں صہن ایک عدد ہے جو م کو کافی بڑا لینے سے
استدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔

$$\text{تب م می} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \dots - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} - \dots$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{2} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^3} < \dots$ پس

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\text{کا مقیاس } > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right)$$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستحق ہے کیونکہ مق $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ کے مقیاس کو انا چھوٹا

بنایا جاسکتا ہے بشنا ہم چاہیں۔ پس م ی کے لئے یہ لاستنا ہی سلسلہ

لمتا ہے

$$\text{م م ی} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots - \frac{1}{2^n} + \dots \quad (15)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ مق $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ اور بالخصوص $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^n}$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے

مسئلہ

$$\text{مس ی} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو متناہلہ مس ی = م م ی - م م ی کے ذریعہ بھی (15) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (16)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس $\frac{1}{\pi}$ سے کم ہو، اور بالخصوص $\pm \frac{1}{\pi}$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

ضابطہ قم ی = مم $\frac{1}{\pi}$ ی - مم ی میں مم $\frac{1}{\pi}$ ی، مم ی کی بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\pi} (1-2) + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{4} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{8} + \dots + (14)$$

جو درست رہتا ہے اگر مم ی $> \pi$ ۔
۲۹۶ - ی کی قوتوں میں ق ی کے لئے سلسلہ حاصل کرنیکے لئے ضابطہ

$$\text{ق ی} = \pi (2 - \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi^2} - \frac{5}{\pi^3} + \dots)$$

$$+ \frac{(1-2)^2}{\pi^2} + \dots + \text{بم}$$

استعمال کیا جاتا ہے جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ ی کا مقیاس $\frac{1}{\pi}$ سے کم ہے۔ ہر کسر کو پھیلا نے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق ی} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} + \dots + \frac{1}{\pi^{2+2r}} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} + \dots$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} + \dots + \text{بم}$$

جو درست ہے اگر $\frac{1}{p} > \frac{1}{\pi}$ -

۲۹۸ — جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تفاعل $\frac{y}{x}$ کو

جہاں $\frac{y}{x}$ اپنی مدد قیمت رکھتا ہے شکل

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں $\frac{y}{x}$ ، $\frac{y^2}{x^2}$ ، $\frac{y^3}{x^3}$ ، ... خاص عدد ہیں جنکو برنولی (Bernouilli) کے عدد کہتے ہیں

اور نیز یہ کہ یہ پھیلاؤ y کی ان تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جنکو سلسلہ مستند ہوتا ہے۔

اگر ہم اس کو $\frac{y}{x}$ سے ضرب دیں تو

$$y = \left\{ \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} + \dots \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{p} + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + \dots \right\}$$

$$- \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} + \dots$$

جہاں y کو اتنا چھوٹا لیا گیا ہے کہ بائیں جانب کے دونوں سلسلے

مطلقاً مستند ہیں۔ ان سلسلوں کو باہم ضرب دیکر حاصل ضرب کو y کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ یہ محصلہ سلسلہ مطلقاً مستند ہوگا اسلئے y کی پہلی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کے

سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

دیگرہ، جکی عام شکل ہے

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$$

ان مساواتوں کے ذریعہ عددوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، کو محسوس کیا جاسکتا ہے، چنانچہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

۲۹۹ — مم ی، مس ی، قم ی کے پھیلاؤں میں (جو ی کی قوتوں میں مائل کئے جاسکتے ہیں) سروں کو برتولی کے عددوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{چونکہ } مم ی = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

اسلئے اگر مم ی کافی چھوٹا ہو تو

$$مم ی = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

نیز قم ی = مم $\frac{۱}{۲}$ ی - مم ی، اسلئے

$$\text{قم ی} = \frac{۱}{۲} + \frac{(۱-۲)۲}{۲} ی + \frac{(۱-۳)۲}{۳} ی + \dots$$

$$+ \frac{(۱-۴)۲}{۴} ی + \dots + \frac{(۱-۵)۲}{۵} ی + \dots + \frac{(۱-۶)۲}{۶} ی + \dots$$

نیز چونکہ مس ی = مم ی - مم ۲ ی، اسلئے

$$\text{مس ی} = \frac{(۱-۲)۲}{۲} ی + \frac{(۱-۳)۲}{۳} ی + \frac{(۱-۴)۲}{۴} ی + \dots$$

$$+ \frac{(۱-۵)۲}{۵} ی + \frac{(۱-۶)۲}{۶} ی + \dots + \frac{(۱-۷)۲}{۷} ی + \dots$$

یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ سلسلے (۱۹) اور (۲۰) مستحق ہیں

اگر مق ی $> \pi$ اور سلسلہ (۲۱) مستحق ہے اگر مق ی $> \pi - \frac{۱}{۲}$

سلسلے (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) علی الترتیب سلسلوں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)

کے حامل ہونے چاہئیں، پس (۱۹) کے سروں کو (۱۵) کے سروں کے مساوی رکھنے سے

(364)

$$\frac{۲}{۲\pi} = \frac{۲}{۲} = ۱، \frac{۲}{۳\pi} = \frac{۲}{۳}، \frac{۲}{۴\pi} = \frac{۲}{۴}، \dots، \frac{۲}{۵\pi} = \frac{۲}{۵}$$

$$= \frac{۲}{۵}$$

اس لئے دفعہ ۲۹۸ میں دی ہوئی ج، ب، ب' کی قیمتوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۲}{۶} = \frac{۲}{۶}، \frac{۲}{۹} = \frac{۲}{۹}، \frac{۲}{۱۲} = \frac{۲}{۱۲}، \dots، \frac{۲}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

$$\text{صہن} = \frac{۲^{۱۰۲} - ۲^{۱۰۱}}{۲^{۱۰۲}}$$

اس طرح صہن ان ضابطوں کی مدد سے محسوب کیا جاسکتا ہے جن سے صہن ملتا ہے۔

سلسلے (۱۹) اور (۲۱) کسی زاوے کے ماس یا ماس التمام کو محسوب کرنے میں راست استعمال کئے جاسکتے ہیں، ان سلسلوں کی پہلی چند قیمتیں ہیں

$$\text{م} = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴۵} - \frac{۲}{۹۴۵} - \dots$$

$$\text{مس} = \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۳} + \frac{۵۲}{۱۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵} + \dots$$

مس (۹۰ × م) م (۹۰ × مس) کو محسوب کرنے کا عمل حسب طریقہ ذیل

انجام پاسکتا ہے :-

$$\text{مس (م \ ۹۰)} = (۹۰ \times \text{م})$$

$$\begin{aligned} & ۲ \text{ م} \setminus \text{د} - ۲ \text{ م} \setminus \text{ن} \times ۲۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵ \times (۲ - ۲) \\ & + ۲۹۷۵۵۶۷۸۲۰۵۹۷ \times \text{م} \setminus \text{ن} \\ & + ۵۰۱۸۶۸۸۶۵۰۲۷۷۳ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۲ \\ & + ۱۰۰۱۸۴۲۴۷۵۲۰۳۲ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۳ \\ & + ۵۰۰۱۹۷۵۸۰۰۷۱۲ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۴ \\ & + ۵۰۰۰۲۱۶۹۷۷۲۷۵ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۵ \\ & + ۵۰۰۰۰۲۲۰۱۱۳۷۰ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۶ \\ & + ۵۰۰۰۰۰۲۶۶۴۱۳۲ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۷ \\ & + ۵۰۰۰۰۰۰۲۹۵۸۶۲ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۸ \\ & + ۵۰۰۰۰۰۰۰۳۲۸۶۷ \times \text{م} \setminus \text{ن}^۹ \end{aligned}$$

ان جملوں میں رقموں $\frac{۸}{۲۳} - \frac{۱}{۲۳} = \frac{۷}{۲۳}$ کو جو مضابطوں (۱۰) اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول مصوب کر لیا جاتا ہے، تب ان رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ مستحق ہوتے ہیں۔ یہ سلسلے یو لری Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں جس میں انکوائس نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے۔

لوکارمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

(365)

۳۰۰۔ دنہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$\text{جب } y = 1 \text{ } \left(\frac{y^2}{23} - 1 \right) \left(\frac{y^2}{23^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{y^2}{23^m} - 1 \right) (1 - y^2)$$

$$\text{جم } y = 1 \text{ } \left(\frac{y^2}{23} - 1 \right) \left(\frac{y^2}{23^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{y^2}{23^m(1-23)} - 1 \right) (1 - y^2)$$

جہاں طم، طم، طم ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس م کو کافی بڑا لینے سے اتنے چھوٹے بنائے جاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اب لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک جب } y = 1 \text{ } = \text{لوک } y + \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23} - 1 \right) + \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23^2} - 1 \right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23^m} - 1 \right) + \text{لوک } (1 - y^2)$$

$$\text{لوک جم } y = 1 \text{ } = \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23} - 1 \right) + \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23^2} - 1 \right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(\frac{y^2}{23^m(1-23)} - 1 \right) + \text{لوک } (1 - y^2)$$

پہلی صورت میں مان لو کہ $|y| > \pi$ اور دوسری صورت میں $y > \pi$ تاکہ یہ لوکارتم y کی قوتوں میں مطلقاً مستحق سلسلوں میں پھیلائے جاسکیں تب ان لوکارتموں کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک جب } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} \left(\frac{1}{\pi^2} + \dots + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{y^2}{\pi^n} + \text{لوک (1- طم)}$$

$$\text{لوک جم } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} \left(\frac{1}{\pi^2} + \dots + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{y^2}{\pi^n} + \text{لوک (1- طم)}$$

اب

$$\dots + \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{\pi^2} + \left(\dots + \frac{1}{\pi^5} + \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi} \right) = \text{اس لئے}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{\pi^2}}{\pi^2} = \dots + \frac{1}{\pi^5} + \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi}$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(366)

$$\text{لوک جب } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^n} \text{ لوک (1- طم)}$$

$$\text{لوک جم } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{\pi^2}}{\pi^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^n} \text{ لوک (1- طم)}$$

جہاں مق ی > π

$$\text{لوک جم ی} = (1 - \frac{2}{\pi})^2 \frac{\text{ب ا ی}}{1} - \frac{2}{\pi} (1 - \frac{2}{\pi})^3 \frac{\text{ب ی}}{2} - \dots - \frac{\text{ب ن ی}}{n} (1 - \frac{2}{\pi})^{n-1} - \dots - \frac{\text{ی}}{n} \dots (23)$$

جہاں مق ی > \frac{1}{4} \pi

سلسلوں (۲۲) (۲۳) کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{لوک جب ی} = \frac{\text{ی}}{6} - \frac{\text{ی}}{180} - \frac{\text{ی}}{2835} - \dots$$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{\text{ی}}{2} - \frac{\text{ی}}{12} - \frac{\text{ی}}{45} - \dots$$

اسلے نیز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{\text{ی}}{3} + \frac{\text{ی}}{30} + \frac{\text{ی}}{2835} + \dots$$

سلسلوں (۲۲) (۲۳) کو لوکارتمی جیب اور جیب التمام کی جدولیں بنیاد کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکارتمو

(367)

لوک (۱ - \frac{\text{ی}}{3})، لوک (۱ - \frac{\text{ی}}{\pi}) کے پہلے لوکارتم الگ الگ محسوس کر لئے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲) (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستند شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لوک جب } \frac{\pi}{n} = \text{لوک } \pi + \text{لوک } \frac{\pi}{n} + \text{لوک } (1 - \frac{\pi}{n})$$

$$= - \left\{ \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{n} \right) \right\}$$

$$\text{لوک جہ } \frac{\pi}{2} = \text{لوک} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) - \left\{ \frac{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2}{2} - \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \right\} \left(\frac{1}{2} - \right)$$

ان مساواتوں کی بائیں جانب کے لوکارتموں کو مقیاس

سے ضرب دینے سے ہمیں جب $(\frac{1}{x} - 9)$ ، ہم $(\frac{1}{x} - 9)$ کے معمولی لوکارا تم

اساس ۱۰۔ اہر مائل ہوتے ہیں۔ اس طرح جو ضابطے ملتے ہیں وہ حسب ذیل ہیں:

ل جب (م\ن ۹۰x) =

لوک m + لوک $(n - m)$ + لوک $(n + m)$

۳- لوک ن + ۲۱۹۰ - ۵۹۸۸۵۷ - ۹۵۹۴

5-2-0221244-59.1x6\7-

5. 0. 1 1 1 4 2 6 6 2 2 1 6 6 1 x 6 \ 7 -

5. . . 39229126253x6 \ 7 -

5 1 4 2 9 2 4 . 4 9 8 x 6 \hat{p} -

- م / ش خ ا ب ج د ه و ز ح ط ي ك ل م ن س

5. $\mu \mu \mu \mu < 10 \times 10^{-17}$ -

..... ۲۳۱۹۳۱ x ۱۵ \ ۳ -

[illegible]

S ۳۹ خت / م -

$$۳۰۱ - (۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots$$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ لوک جب لا} = \frac{1}{n^2} \text{ لوک } (1 - \frac{1}{n^2})$$

$$\dots - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$\text{اور نیز لوک جب لا} = \frac{1}{n^2} \text{ لوک } (1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6} + \dots)$$

$$\dots - (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}) - (\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6}) - \dots =$$

(362) اسلئے لوک جب لا کے ان دو جملوں میں لا کے سرور کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{پھر چونکہ لوک جم لا} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ لوک } \{ (1 - \frac{1}{n^2}) \}$$

$$\dots - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$\text{اور نیز لوک جم لا} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ لوک } (1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6} + \dots)$$

$$\dots - (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}) - (\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6}) - \dots =$$

$$\frac{\dots\dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + 1}{\dots\dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + 1} = \text{اور یہ}$$

$$\frac{15}{2^2} = \frac{2^2 \frac{1}{2}}{2^2 \frac{1}{2}} = \text{یا}$$

(۴) ایک لا متناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لا متناہی تعداد سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنہیں سے ہر ایک کا طول ۱ ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اس کا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کرو کہ تمام نقاط تقسیم سے اس نقطہ کے فاصلوں کے متکافینوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{\text{جب } \frac{6\pi^2}{1}}{\frac{5\pi^2}{1} - \text{جب } \frac{6\pi^2}{1}} \frac{\pi}{1}$$

(369) جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (n+1)^2}$ ہے جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 - n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + n^2}$$

کے حاصل ہے۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{1} \right\} \frac{\pi}{1}$$

$$\text{جب } \frac{\pi^2}{1}$$

$$\frac{\pi}{1} \text{ یا } \frac{\pi}{1} \text{ جب } \frac{\pi}{1} \text{ جب } \frac{\pi}{1}$$

اور یہ مطلوبہ نتیجہ میں تحول ہو جاتا ہے۔

سترہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم} \left(\frac{1}{n} \pi \text{ جب } \pi \right) = \frac{1}{n} \pi \text{ جم} \pi \left(\frac{1}{n} \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{n} \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{n} \pi \right) + \dots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$+ \text{جب } \pi = \frac{1}{n} \pi \left(\frac{1}{n} \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{n} \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{n} \pi \right) + \dots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\pi^2 = \frac{1}{(n+m)(n+m)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}$$

جہاں 'م' تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لا صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 3} + \dots = \frac{(1 + \frac{1}{n^2}) (1 + \frac{1}{n^2}) (1 + \frac{1}{n^2}) \dots}{(1 - \frac{1}{n^2}) (1 - \frac{1}{n^2}) (1 - \frac{1}{n^2}) \dots}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے شکافیوں کی

چوتھی قوتوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^{384}}{9 \times 5}$ ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi}{8} = \left(\dots + \frac{1}{5+3} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{1+2} \right) \left(\dots + \frac{2}{3+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{1+1} \right)$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \left(\frac{1}{5 \times 3 \times 2} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 2 \times 1} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 1 \times 1} \right)$$

کا مجموعہ $\frac{39}{16} - \frac{1}{4} \pi$ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$(1-m) = \frac{(1-m^2) \dots (1-m^{2n})}{\{ (1-m) - m^2 \} \dots \{ (1-m) - m^{2n} \} \dots \{ (1-m) - m^{2\infty} \}}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\dots - \frac{5}{20+25} + \frac{3}{20+23} - \frac{1}{20+21}$$

کا مجموعہ $\frac{1}{4} \pi$ قطب $\frac{1}{2} \pi$ ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 \text{ا} - \text{مس}^1 \text{ا} + \text{مس}^1 \text{ا} - \text{مس}^1 \text{ا} + \dots = \text{مس}^1 \text{ا} - \text{مس}^1 \text{ا} + \text{مس}^1 \text{ا} - \text{مس}^1 \text{ا} + \dots$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \pi$$

لوک ۱۲-۲۲ = π

= (جذبہ ۲۷ + حجم بہ ۲۷ - ۲ حجم ۲۷ - ۲۷ جذبہ ۲۷ + حجم ۲۷) ۴ (عہ + پ) ۴
 جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے۔
 ۲۲ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{12 \times 11 \times 10 \times 9} + \frac{1}{8 \times 7 \times 6 \times 5} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{23} \pi$$

$$\dots + \frac{1}{23 \times 21 \times 19 \times 17} + \frac{1}{15 \times 13 \times 11 \times 9} + \frac{1}{5 \times 3 \times 1}$$

$$= \frac{\pi}{(21+2)96}$$

۲۳ - اگر $(x) = (x) + 1$ ، $(y) = (y) + 1$ ، $(z) = (z) + 1$ ، ... = $(x+y+z)$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} \text{ مس } + \frac{1}{2} \text{ مس } + \frac{1}{3} \text{ مس } + \dots = \frac{1}{4} \text{ مس}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{13} \text{ مس } + \frac{1}{12} \text{ مس } + \frac{1}{11} \text{ مس}$$

$$= \text{مس} \left(\frac{\frac{1}{11} \text{ مس} - \frac{1}{12} \text{ مس}}{\frac{1}{11} \text{ مس} + \frac{1}{12} \text{ مس}} \right)$$

۲۴ - ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\pi^2} - \frac{\text{جزء } \pi^2 \text{ ج} + \pi^2 \text{ ل}}{\pi^2 \text{ ج} - \pi^2 \text{ ل}} \times \frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} \quad \infty$$

۲۵ - ثابت کرد که

$$\frac{1}{\pi^2 + \pi^2} = \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} \quad \infty = \infty$$

۲۶ - ثابت کرد که

$$\frac{\frac{\text{ب} + \text{ل}}{\text{ف}} + \frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ب}}{\text{ف}} + \frac{\text{ج}}{\text{ف}}}$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 \text{ ل} + \text{ل}(\text{ج} - \text{ب})}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب}) + 1} + 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^2 \text{ ل} + \text{ل}(\text{ج} - \text{ب})}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب}) + 1} + 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^2 \text{ ل} + \text{ل}(\text{ج} - \text{ب})}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب}) + 1} + 1 \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 \text{ ل} + \text{ل}(\text{ج} - \text{ب})}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب}) + 1} + 1 \right\} \left(\frac{\pi^2}{\text{ج} - \text{ب}} + 1 \right) = \frac{\frac{\text{ب} + \text{ل}}{\text{ف}} - \frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ب}}{\text{ف}} - \frac{\text{ج}}{\text{ف}}} \text{ اور}$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 \text{ ل} + \text{ل}(\text{ج} - \text{ب})}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب}) + 1} + 1 \right\} \dots \dots \dots (\text{یو ل})$$

۲۷ - اگر

(372)

$$\frac{1}{\pi^2 + \pi^2} - \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} + \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} - \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} + \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} - \frac{1}{\pi^2 + \pi^2} = \text{ف}$$

$$\frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} = \text{ق}$$

$$\frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} - \frac{1}{\pi^2 (\text{ج} - \text{ب})} = \text{ر}$$

$$\dots + \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-n)^2} + \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-n)^2} = \text{س}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi^2 (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2)}{2n \times 4n \times 6n \times 8n} = \text{س} \quad \frac{\pi^2 (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2)}{2n \times 4n \times 6n \times 8n} = \text{س}$$

$$\frac{\pi^2 (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2)}{2n \times 4n \times 6n \times 8n} = \text{س}$$

جہاں $\text{ک} = \text{س} = \frac{\pi^2}{2n}$ (یولر)

۲۸۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$$

کا مجموعہ جس میں وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لئے گئے ہیں $\pi^2 \sqrt{18}$ ہے۔ (یولر)

۲۹۔ ثابت کرو کہ ان سب عددوں کے متکافینوں کے مربعوں کا مجموعہ

$\frac{\pi^2}{6}$ ہے جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1^2 + 6^2}{1^2 + 3^2} + 1 \right) \left(\frac{1^2 - 6^2}{1^2 + 3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{\text{جنرنا} + \text{جنرنگ}}{\text{جنرنگ}}$$

$$\dots \dots \dots \left(\frac{1^2 - 6^2}{1^2 + 3^2} - 1 \right) \times$$

$$\left(\frac{1^2 + 6^2}{1^2 + 3^2} + 1 \right) \left(\frac{1^2 - 6^2}{1^2 + 3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{\text{جنرنا} - \text{جنرنگ}}{1 - \text{جنرنگ}}$$

$$x \left(1 - \frac{1^2 - 1^2}{2^2 + 2^2} \right) \dots \dots \dots (10)$$

۳۱۔ ثابت کرو کہ جب 'ن' طاق ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi(1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{\pi(1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$x(n^2 - n^2 + 13)$$

۳۲۔ ثابت کرو کہ لاستناہی حاصل ضرب

$$\dots \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\text{جزء } \pi \text{ علاء جم } \pi \text{ بہ لا} \right)^{-1} \text{ اگر ن حقیقت ہے}$$

$$\text{اور } = \frac{1}{\pi^2} \left(\text{جزء } \frac{1}{\pi} \text{ علاء جم } \pi \text{ بہ لا} \right)^{-1} \text{ اگر ن طاق ہے}$$

جہاں 'ع' ہر علی الترتیب جب $\frac{\pi}{n}$ 'جم' $\frac{\pi}{n}$ کو تغیر کرتے ہیں اور 'ا' ایک طاق عدد ہے۔
(گلیشیئر)

۳۳۔ ثابت کرو کہ لاستناہی حاصل ضرب

$$\dots \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\text{جزء } \pi \text{ علاء جم } \pi \text{ بہ لا} \right)^{-1}$$

اگر ن جفت ہے اور

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\pi - \pi_1)} = \text{جنر } \pi \text{ لا } \pi_1^{-1} \text{ (جنر } \pi_2 \text{ ع لا - جم } \pi_2 \text{ ب لا)}$$

اگر ن طاق ہے - ع اور ب کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال مابوق میں تھا۔

(گلیشیر)

۳۴ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{\pi_2 + \pi_3} + \frac{1}{\pi_2 + \pi_4} + \frac{1}{\pi_2 + \pi_5} + \dots$$

$$\frac{1}{\pi_2} - \frac{1 - \pi}{\sum_{i=1}^{\pi} \pi_i} = \text{ع جنر } \pi_2 \text{ ع لا + ب جب } \pi_2 \text{ ب لا}$$

جہاں ع اور ب کے وہی معنی ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلیشیر)

۳۵ - ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} + \frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2}$$

$$\left\{ \frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} + \frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2}$$

$$\pi = \text{جب } \pi_2 \left(\frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2} \right) \setminus \left\{ \text{جنر } \pi_2 \left(\frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2} \right) \right\}$$

$$\left\{ \text{جم } - \pi_2 \left(\frac{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2} \right) \right\}$$



(374)

اٹھارواں باب

مسل کسیر

II کے غیر منطق ہونی کا ثبوت

۳۰۲۔ فرض کرو کہ مستحق سلسلہ

$$-1 + \frac{لا^2}{(2+ج)(1+ج)ج \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{لا^2}{(1+ج)ج \times 2 \times 1} + \frac{لا^2}{ج \times 1}$$

ف (ج) سے تعبیر ہوتا ہے تب

$$ف(1+ج) - ف(ج) = \frac{لا^2}{ج(1+ج)} ف(2+ج)$$

$$اس لئے \frac{ف(ج)}{ف(1+ج)} = 1 - \frac{لا^2}{ج(1+ج)} \frac{ف(2+ج)}{ف(1+ج)}$$

پس ف (ج) \ (1+ج) ف (ج) کو دوسری جماعت کی مسلسل کسر

$$\frac{1}{لا(ج)(1+ج)} \frac{لا^2}{(1+ج)(2+ج)} \frac{لا^2}{(2+ج)(3+ج)} \dots$$

کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ ج = $\frac{1}{p}$ اور لا کی بجائے $\frac{1}{p}$ لاکھو تو سلسلہ ف (ج) ہو جائے

$$1 - \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3 \times 2 \times 1} - \dots$$

یا

اور ف (ج+۱) جب لا ہو جاتا ہے۔ پس

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$$

جو س لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک مسلسل کسر ہے۔
۳. ۳۔ لیبرٹ کا وہ ثبوت ہے جو π کے غیر منطوق ہونے کے متعلق ہے محض بالاسلسل کسر پر منحصر ہے۔ رکھو لا = $\frac{1}{\pi}$

اور بغرض امکان رکھو $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{n}$ جہاں م اور ن صحیح عدد ہیں۔

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots = \frac{1}{2}$$

اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسروں $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots$

(375)

کے نسب نامہ شمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ کی رو سے مساوات کی بائیں جانب کی سلسل کسر ایک غیر منطوق انتہا رکھتی ہے اور اسلئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ پس $\frac{1}{\pi}$ کسر کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م اور ن صحیح عدد ہوں اور اسلئے π غیر منطوق ہے۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱) کے وسیع تر

۱۷۶۱ء میں برلن اکاڈمی کی یادداشت میں شائع ہوا۔

۲۵ دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴)۔

مسئلہ میں شامل ہے جو یہ ہے کہ Π ایک علوی عدد ہے۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ

۳-۴ — کسر فا (ع، ب، ۱ + ج، ۱ + لا) \ فا (ع، ب، ج، لا)
کو جس میں فا (ع، ب، ج، لا) علوی ہندسی سلسلہ

$$+ 1 + \frac{ع \times ۲}{ج} + \frac{ع (ع + ۱) \times ۲ (ب + ۱) \times ۱}{لا} + \dots$$

کو تعبیر کرتا ہے مسلسل کسر

$$\dots \dots \dots \frac{۱}{-۱} \frac{ک}{-۱} \frac{لا}{-۱} \frac{ک}{-۱} \frac{لا}{-۱} \dots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$ک = \frac{ع (ج - ب)}{ج (ج + ۱)}, ک = \frac{(ب + ۱) (ج + ۱ - ع)}{(ج + ۱) (ج + ۲)}$$

$$ک = \frac{(ب + ۱) (ع + ۱) (ج + ۱ - ب)}{(ج + ۲) (ج + ۳)}$$

$$ک = \frac{(ب + ۲) (ج + ۲ - ع)}{(ج + ۳) (ج + ۴)}, \dots$$

$$ک = \frac{(ع + ن - ۱) (ج + ن - ۱ - ب)}{(ج + ن - ۲) (ج + ن - ۱)}$$

$$ک = \frac{(ب + ن) (ع + ن - ب)}{(ج + ن - ۲) (ج + ن - ۱)}$$

اس استحالہ کا فائدہ تمثیل ذیل سے ظاہر ہوگا۔ سلسلہ

$$\left\{ 1 + \frac{2}{3} \text{ جب } 2 \text{ جب } 2 + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \text{ جب } 2 + \dots \right\}$$

یہ اور ضابطہ بالا میں رکھو $e = a' b = a' c = \frac{1}{r}$ لا = جب 2 تو

$$\text{جب } 2 \text{ جب } 2 \quad \frac{2 \times 1}{3 \times 1} \text{ جب } 2 \quad \frac{2 \times 1}{5 \times 3} \text{ جب } 2 \quad \frac{2 \times 2}{5 \times 5} \text{ جب } 2 \quad \dots$$

اس کے دوسرے مستحق سے 2 کیلئے اسٹیلیس (Snellius) کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } 2 \text{ جب } 2 = \frac{2 \text{ جب } 2}{(2 + 2 \text{ جب } 2)^2} = 1 - \frac{2}{3} \text{ جب } 2$$

یہ لوگر کا احتمال

(376)

۵۔ ۳۔ یو لار کے سند

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

کے ذریعہ جسکو اس شکل

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے دیگر سلسلے متحمل ہو سکتے ہیں۔

۱۰۔ دیکھو کرسٹل کا الجبر جلد دوم صفحہ ۲۸۷۔

اس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{n} \text{ مم } \frac{\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m-2n} + \dots$$

سے مسئلہ

$$\frac{\pi}{n} \text{ مم } \frac{\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{m^2}{m^2-n^2} + \frac{(n-m)^2}{m^2+m^2} + \frac{(n+m)^2}{m^2+m^2} + \frac{(2n-m)^2}{m^2+m^2} + \dots$$

$$\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2} + \dots$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اٹھارویں باب پرتالیں

امثلہ (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\dots - \frac{(n-2)^2}{m^2-n^2} + \dots$$

جہاں $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ اور n پر کوئی قید نہیں ہے۔

$$3 - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\dots - \frac{(n-16)^2}{m^2-n^2} + \dots$$

$$5 - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$۴ - \text{مسئله ۱} = \frac{\text{ن مس ۱} (ن - ۱) \text{مس ۱} (ن - ۲) \text{مس ۱} (ن - ۳)}{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}$$

$$۵ - \text{مسئله ۱} = \frac{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}$$

$$۶ - \text{مسئله ۱} = \frac{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}$$

$$۷ - \text{مسئله ۱} = \frac{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}$$

$$۸ - \text{مسئله ۱} = \frac{\text{ن مس ۱} (ن + ۱) \text{مس ۱} (ن + ۲) \text{مس ۱} (ن + ۳)}{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}$$

$$۹ - \frac{\pi}{\text{ن}} \text{ ق م } \frac{\pi}{\text{ن}} = ۱ + \frac{۱}{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}$$

$$\dots \frac{\text{ن} (۱ - \text{ن})}{+۱}$$

$$۱۰ - \frac{\text{جیب } \frac{\pi}{\text{ن}}}{\frac{\pi}{\text{ن}}} = ۱ + \frac{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}$$

$$\dots \frac{\text{ن} (۲ - \text{ن})}{-۱ + \text{ن}}$$

$$۱۱ - \text{ج م } \frac{\pi}{۲} = ۱ + \frac{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}$$

$$۱۲ - \text{م م } \frac{۱}{\text{ن}} = \frac{۱}{\frac{۱}{+۱} - \frac{۳}{+۳} - \frac{۵}{+۵} - \frac{۷}{+۷}}$$

$$۱۳ - \text{جیب ط} = \frac{\frac{۲ \times ۱}{۳ \times ۱} \text{ جیب } \frac{۱}{۳} \text{ ط} - \frac{۲ \times ۱}{۵ \times ۳} \text{ جیب } \frac{۱}{۵} \text{ ط} + \frac{۲ \times ۳}{۷ \times ۵} \text{ جیب } \frac{۱}{۷} \text{ ط}}{\frac{۱}{-۱} - \frac{۳}{-۳} - \frac{۵}{-۵} - \frac{۷}{-۷}}$$

متفرق مثالیں

(378)

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم م لا} - \text{جم م ع}}{\text{جم لا} - \text{جم ع}} = \text{قم ع} \left\{ \text{جب م ع جم (م-۱) لا + جب ۲ ع جم (م-۲) لا} \right.$$

$$+ \dots + \text{جب م لا + جب م ع} \left. \right\} \text{ (ہرمانٹ)}$$

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور ع = $\frac{\text{ک}}{\text{ن}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب م لا}}{\text{جب ن لا}} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ک}} (1 - \text{جب م ع مم لا} - \text{ع})$$

اور نیز یہ بخلاف

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ک}} (1 - \text{جب م ع مم لا} - \text{ع})$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ک}} (1 - \text{جب م ع قم لا} - \text{ع})$$

بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو۔
۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مم (لا-ع) مم (لا-بی) ... مم (لا-لہ)} \left\{ \text{جم} \frac{1}{\text{ن}} + \pi \right\} \sum_{\text{ک}} (1 - \text{مم لا} - \text{ع})$$

جہاں $\sum_{\text{ک}} = \text{مم (ع-بی) مم (ع-بی) ... مم (ع-لہ)}$
(ہرمانٹ)

۴۔ اگر 'ا' ب' ج' ایک مثلث کے زاویے ہوں اور لا' ما' ی وہ حقیقی مقداریں جو مساواتوں

$$\text{جز لا (جب ب جب ج) } \frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ 'ا'}$$

$$\text{جز ما (جب ج جب ا) } \frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ 'ب'}$$

جزی (جب ا جب ب) $\frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ 'ج'}$
سے حاصل ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی تین نقطے جو اس طور واقع ہوں کہ ان میں سے دو دو کے درمیان فاصلے علی الترتیب لا' ما' ی کے متناسب ہیں ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔
۵۔ اگر لا < $\frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{1}{1+لا} < \frac{1}{1+لا} \text{ اور } \frac{1}{1-لا} > \frac{1}{1-لا}$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{1}{ن} = \frac{1}{ن} \text{ ک } = ن - ۱}{\frac{ن}{ن} = ۱}$$

اس بڑے سے بڑے صحیح عدد کے مساوی ہے جو $\frac{1}{ن}$ میں ہے۔
۷۔ ثابت کرو کہ

(879)

$$\text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۲)} + \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۳)} + \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۴)} + \dots$$

$$\text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۲)} + \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۳)} + \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۴)} + \dots = \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۲)} + \text{مس } \frac{۲}{۲+۱(۳)} + \dots$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$م^1 (1 + \frac{3}{n}) + م^2 (2 + \frac{3}{n}) + م^3 (3 + \frac{3}{n}) + \dots$$

کا مجموعہ $م^1 \frac{1}{2}$ ہے۔
 اگر ۸- مس اقطاب + مس ب قط ۱ = مس ج
 تو ثابت کرو کہ مس اقط ۱ + مس ب قطب + مس ج قطح
 ۲ + مس اس ب مس ج = ۰
 اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب ا ب م ۱ + جب ب ج م ۲ + جب ج ا م ۳ - جب ا ب ج جب ج - جب ا ب ج جب ج -

کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو جہاں 'ا' ب' ج ایک
 مثلث کے زاویے ہیں۔

۹- اگر م اور ن کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(m+n)(n+1)} \right\} \frac{1}{2}$$

$$+ \left\{ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(m+n)(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{n} - \left\{ m(m+1)(n+1) \right\}$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \left\{ m(m+1)(n+2)(n+3) \right\} + \dots$$

۱۰- ثابت کرو کہ

ا	جم ع	جم (ع + ب)	جم (ع + ب + ج)	جم (ع + ب + ج + د)
جم ع	ا	جم ب	جم (ب + ج)	جم (ب + ج + د)
جم (ع + ب)	جم ب	ا	جم ج	جم (ج + د)
جم (ع + ب + ج)	جم (ب + ج)	جم ج	ا	جم د
جم (ع + ب + ج + د)	جم (ب + ج + د)	جم (ج + د)	جم د	ا

۱۱- ثابت کرو کہ مقطع

ا	جم ا	جب ا	جم (ا + ب)
ا	جم ب	جب ب	جم (ا + ب + ج)
ا	جم ج	جب ج	جم (ا + ب + ج + د)
ا	جم د	جب د	جم (ا + ب + ج + د + ع)

$$= م [\text{جب (ا + ب + ج + د + ع)}] \{ \text{جب ا} \frac{1}{2} (ب - ا) \}$$

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور اس $= \frac{1}{4} (ا + ب + ج + د)$ اگر

$$\text{جم (ا - لا - ما - ی) جب (ا - ما - ی) + جم (ا - ما - ی - لا) جب (ا - لا - ی) + جم (ا - لا - ما - ی) جب (ا - لا - ما - ی) =$$

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں $\frac{1}{2}$ کے ضعف کا فرق نہ ہو تو

$$\text{جم ا + لا + ما + ی} = \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} + \text{جم د} + \text{جم ع}$$

(380)

ہوں جو مساوات

جب $\frac{1}{2}$ ط $\frac{1}{2}$ ط (ا + ب) + جب $\frac{1}{2}$ ط (ب + ج) + جب $\frac{1}{2}$ ط (ج + د) + جب $\frac{1}{2}$ ط (د + ع) = کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ ع اور ب اس مساوات

$$\text{جب } ۲ \text{ فہ جم (جہ + ضہ) + جب } ۲ \text{ جہ جم (ضہ + فہ) + جب } ۲ \text{ ضہ جم (جہ + فہ) = (فہ + ضہ) =$$

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴۔ اگر مس طہ کی تین محصلہ قیمتیں مس ع، مس ب، مس ج ہوں جبکہ مس طہ دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ جم ع جم ب جم جہ جب (ع + ب + جہ) + جب ع جب بہ جب جہ جم (ع + ب + جہ) =$$

$$(۲) \text{ جب (ب + جہ) جب (جہ + ع) جب (ع + ب) =$$

$$\text{جب } ۲ \text{ عہ جب } ۲ \text{ بہ جب } ۲ \text{ جہ}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۲ \text{ (بہ - جہ) جم } \frac{\text{جم جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{جہ } ۲ + \text{بہ } ۲ + \text{عہ } ۲}{۲}$$

$$\text{جب } ۲ \text{ (بہ - جہ) جم } \frac{\text{جم جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{جہ } ۲ + \text{بہ } ۲ + \text{عہ } ۲}{۲}$$

$$\text{جب } ۲ \text{ (عہ + بہ + جہ) + جب } ۲ \text{ (جہ + بہ + عہ) =$$

$$\text{جم } ۲ \text{ (عہ + بہ + جہ) + جب } ۲ \text{ (جہ + بہ + عہ)}$$

جہاں عل جمع ۳ اس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو زاویوں ع، ب، جہ

کے باہمی دائری تبادله سے بنتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر

$$\frac{\text{جم } ۲}{+۱} + \frac{\text{جم } ۲}{+۱} + \frac{\text{جم } ۲}{+۱} + \dots$$

مستقل ہے۔
۲۰۔ اگر لا حقیقی ہو اور $1 < لا < ۳$ ۔ اور اگر مس^۱ ای سے مراد وہ کم سے کم مثبت زاویہ ہو جسکا ماس ی ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\cos ۱}{۳} - (۱ - \frac{\cos ۱}{۳}) = \frac{\cos ۱}{۳} = \frac{\cos ۱}{۳} \quad \text{مس}^۱ = \frac{\cos ۱}{۳} \quad \text{مس}^۱ = \frac{\cos ۱}{۳}$$

۲۱۔ اگر مثلث ا ب ج کے باہمی دائروں کے مرکزوں میں سے گزرنیوالے دائرہ پر کوئی نقطہ خ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{اف}{ب ج} (۱ + جم - جم ب - جم ج) + \frac{ب ف}{ج ا} (۱ - جم + جم ب + جم ج) = ۰$$

$$+ \frac{ج ف}{ا ب} (۱ - جم - جم ب + جم ج) = (جم + جم ب + جم ج) = ۰$$

۲۲۔ اگر $ع = ۱$ جم ن ط + ب جب ن طہ جہاں ا اور ب ن پر منحصر نہیں ہیں تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$ع ۱ + ع ۲ - ع ۱ جم طہ + ع ۱ - ع ۱ = ۰$$

ثابت کرو کہ

$$\frac{۲ جب طہ + جب طہ}{جم طہ - جم طہ} = \frac{مس طہ مس (طہ + طہ) مس (طہ - طہ)}{جم طہ - جم طہ}$$

۲۳۔ اگر مثلث کی مبہم صورت میں جبکہ ا ب ا دے گئے ہوں

بیرونی دائرے کے مرکز، مرکز ہندسی، نقطہ قطعی دائرہ کے مرکز، اور مرکز عمودی کے دو دو محل علی الترتیب و ا و ب، ث، ث، ن، ن، ع، ع ہوں تو ثابت کرو کہ

مساوات $ا + ۱ = ۱$ کی اسلیں ہیں اور بتاؤ کہ جم کے قیست حاصل کرنے کے لئے یہ عمل جو اوپر بتایا گیا ہے کس طرح جاری کیا جاسکتا ہے۔

ستارہ مثلثوں والے ایک منظم کثیر ضلعی کے نو متصلہ راس $ا ب ج د ع ف گ ہ$ ہیں اور یہ کثیر ضلعی ایک دائرہ میں جس کا مرکز $و$ ہے بنایا گیا ہے۔ وتروں $ب ع ج ک د ف گ ہ$ کے نقاط وسطی کے $ظ$ و $ا$ پر علی الترتیب $ع$ ، $یہ$ ، $ج$ ، $ضہ$ ہیں نہایت کرو کہ $ع$ یہ اور $جہ$ ضہ کو نظر مان کر دو دائرے کھینچے جائیں تو ان کا مشترک وتر $و$ میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول $\frac{۱}{۲}$ و $ا$ ہے۔

۲۷۔ اگر مثلث $ا ب ج$ کے اندرونی اور باہمی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطہ دائرہ کا مرکز فاصلوں $ع$ ، $یہ$ ، $جہ$ ضہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{بہ + جہ + ضہ - ا ع} + \frac{۱}{جہ + ضہ + ع - ا یہ} + \frac{۱}{ضہ + ع + یہ - ا جہ} = ۰$$

اور یہ کہ $ع + یہ + جہ + ضہ = ر$ (۱۳-۸ جم) (جم ب جم ج) جہاں $ر$ بیرونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

$$۲۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{\pi ۳}{۱۱} + ۴ جب \frac{\pi ۲}{۱۱} = \frac{\pi ۱}{۱۱}$$$

۲۹۔ اگر مثلث $ا ب ج$ کے اندرونی دائرہ کا مرکز $ع$ اور باہمی دائروں کے مرکز $ل$ ، $م$ ، $ن$ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث $ع م ن$ ، $ع ن ل$ ، $ع ل م$ کے اندرونی دائرے دائرہ $ا ب ج$ کو سس کرتے ہیں اور ان میں نقاط تماس سے جو مثلث بنتا ہے

نقطہ ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$\text{سرف ق} + \text{و} = \text{سرف ق} + \text{و} + \dots$$

$$\dots + \text{سرف ق} + \text{و} = \text{ن سرف ق} + \text{و}$$

جہاں 'ف' دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ ق و ف = ن

x ق و ف، اور ق و پرق ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر میں

ق س، ق س، 'دائرہ کو س' کا میں قطع کریں) ق و س = ن x

ق و س -

۳۳ - اگر م، م، ...، م اس وہ صحیح عدد ہوں جو م سے (383)

چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف

مفرد اجزائے ضربی ف، ف، ...، ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{\text{جب م ط} \times \text{جب م ط} \times \text{جب م ط}}{\text{جب م ط} \times \text{جب م ط} \times \text{جب م ط}} = \left(\frac{\text{م}}{\text{م}} + \frac{\text{ط}}{\text{م}} \right)$$

۳۴ - ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو

ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = س جبکہ س ≤ ۳ ثابت کر دو کہ

ماثل ضربوں جب ف ع جب ق (ع + ۳) جب ر (ع + ۳) (۳ + ۳)

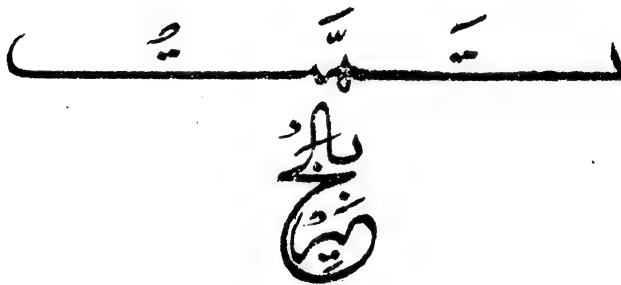
کا مجموعہ مفرد ہے سوائے اس صورت کے جبکہ س = ۳ کا ضعف ہو اور

= مجموعہ - $\frac{1}{n}$ جب n سے ہے جیکہ n کا ایک ضعف ہو -
۳۵ - اگر $n = ۲$ مس طہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \right\}$$

$$\text{جب طہ} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \right\}$$

$$۲ \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ طہ} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \right\}$$



$$\frac{484}{92}$$

اصطلاحات علم مثلث مستوی

Absolutely convergent

Ambiguity of sign

Ambiguous sign

Analytical

Argument

Base

Centroid

Circle of convergence

Circular functions

Circular measure

Circum-circle

Circumscribed polygon

Complex number

Complex variable

Conditionally convergent

Continuous functions

مطلقاً مستقر

علامت کا ابہام

مبہم علامت

تحلیلی

ولیل وجہ

اساس قاعدہ

مرکز ہندسی

استدقاق کا دائرہ

دائری تفاعل

دائری ناپ

حاطد دائرہ بیرونی دائرہ

حاطد کثیر الاضلاع

مقف عدد

مقف متغیر

مشروطاً مستقر

مسلسل تفاعل

Convergence	استدقاق
Coterminal angles	هم اختتامی زاوے
Depression (angle of)	(زاویہ) نشیب
Doubly periodic	دو دوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوکارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جبر)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جبر)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی ماس (مسر)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی ماس التمام (قمر)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطر)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمر)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متماثلہ
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لا تساوی
Infinite products	لامتناہی حاصل ضرب
Infinite series	لامتناہی سلسلہ

Inscribed polygon

اندرونی کثیرالاضلاع

Integral values

صحیح عددی قیمتیں

Internal bisectors

اندرونی ناصف

Inverse circular functions

مقلوب دائری تقاغل

Irrational

غیر منطوق

Lateral

جانبی

Limit

انتہا

Limits

حدود

Maximum

اعظم

Minimum

اقبل

Minute

دقیقہ

Modulus

مقیاس

Multiple angles

ضلعی زاوے

Natural circular functions

طبعی دائری تقاغل

Natural logarithms

طبعی لوکارتم

Necessary and sufficient condition

ضروری اور کافی شرط

Nine-point circle

نو نقطی دائرہ

Oblique-angled triangle

غیر قائم الزاویہ مثلث

Odd functions

طاق تقاغل

Orthocentre

مرکز عمودی

Parallelepiped

متوازی السطوح

Partial fractions

جزوی کسور

Pedal line

خط پائین

Pedal triangle

مثلث پائین

Period

دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	مقدار قیمت
Projection	طس
Quadrature of the circle	دائرہ کی تربیع
Radian	نیم قطری
Raduis of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Raduis vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	منظم کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضعیفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	مثلثی تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق

